

# ПРЕДСЛОВИЕ

Эта книга рассчитана на читателя, желающего за весьма короткое время сформировать правильное понимание линейной алгебры.

Наибольшую пользу от «Линейной алгебры» могут получить:

- студенты университетов, желающие освоить линейную алгебру или уже находящиеся в процессе ее изучения и нуждающиеся в пояснениях;
- учащиеся, которые «проходили» линейную алгебру ранее, но так и не поняли, о чем она;
- учащиеся старших классов и колледжей, готовящихся к поступлению в технические вузы;
- и все те, кто ценит чувство юмора и питает интерес к математике!

Книга состоит из следующих разделов:

- глава 1 «Что такое линейная алгебра?»;
- глава 2 «Основы»;
- глава 3 и 4 «Матрицы»;
- глава 5 и 6 «Векторы»;
- глава 7 «Линейные преобразования»;
- глава 8 «Собственные числа и собственные векторы».

Большинство глав включают в себя раздел-мангу и раздел с текстом.

Если читать только мангу и пропускать текст, то получишь краткий обзор каждой темы, но я рекомендую прочитать все составные части, а затем для максимального результата рассмотреть каждую тему подробнее. Эта книга представляет собой дополнение к другой, более сложной и углубленной литературе, но не ее замену.

Я хотел бы выразить благодарность моему издателю и всему издательству Омша за предоставленную возможность опубликовать эту книгу, а также иллюстратору Ирохе Иноуэ. Также хочу выразить признательность `re_akino`, написавшему сценарий, и всему персоналу Trend Pro, работавшему над превращением моей рукописи в эту мангу. Также я получил много полезных советов от Кадзуюки Хираока и Сидзуки Хори. Спасибо всем.

*Ноябрь 2008 года  
Син Такахаси*

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	v
<b>Пролог. ЗАНЯТИЯ НАЧИНАЮТСЯ!</b> .....	1
<b>Глава 1. ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА?</b> .....	9
1.1. Краткий обзор курса линейной алгебры .....	14
1.2. Темы, которые важны для науки, и темы, которые попадают на экзаменах .....	21
1.3. Линейная алгебра с точки зрения математиков .....	22
1.3.1. Линейное пространство, как его видят математики .....	22
1.3.2. Линейная алгебра и аксиомы .....	24
<b>Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ</b> .....	25
2.1. Классификация систем чисел.....	29
2.2. Импликация и равенство.....	31
2.2.1. Положения.....	31
2.2.2. Импликация.....	32
2.2.3. Эквивалентность .....	33
2.3. Теория множеств.....	34
2.3.1. Множества .....	34
2.3.2. Символы множеств.....	36
2.3.3. Подмножества.....	37
2.4. Функции.....	39
2.4.1. Обозначение функций .....	39
2.4.2. Образы .....	44
2.4.3. Домен и кодомен .....	48
2.4.4. Сюръекция и биекция.....	50
2.4.5. Обратные функции .....	52
2.4.6. Линейные преобразования.....	54
2.5. Греческий алфавит .....	59
2.6. Научные выражения .....	61
2.7. Сочетания и перестановки.....	62
2.8. Не все "команды к выполнению" являются функциями .....	68

<b>Глава 3. ПОЗНАКОМИМСЯ С МАТРИЦАМИ</b> .....	69
3.1. Что такое матрица? .....	72
3.2. Вычисление матриц .....	76
3.2.1. Сложение .....	76
3.2.2. Вычитание .....	77
3.2.3. Скалярное умножение .....	78
3.2.4. Умножение матриц.....	79
3.3. Специальные матрицы .....	83
3.3.1. Нулевые матрицы.....	83
3.3.2. Транспонированные матрицы .....	84
3.3.3. Симметричные матрицы .....	85
3.3.4. Верхние треугольные и нижние треугольные матрицы.....	85
3.3.5. Диагональные матрицы .....	86
3.3.6. Тожественные матрицы.....	88
<b>Глава 4. И СНОВА МАТРИЦЫ</b> .....	91
4.1. Обратные матрицы .....	92
Обратные матрицы .....	92
4.2. Вычисление обратных матриц .....	94
4.3. Определители .....	101
4.4. Вычисление определителей.....	102
4.5. Вычисление обратных матриц с помощью алгебраических дополнений .....	114
4.5.1. $M_{ij}$ .....	114
4.5.2. $C_{ij}$ .....	115
4.5.3. Вычисление обратных матриц.....	116
4.6. Применение определителей.....	117
4.7. Решение линейных систем уравнений с помощью правила Крамера.....	117
<b>Глава 5. ПОЗНАКОМИМСЯ С ВЕКТОРАМИ</b> .....	119
5.1. Что такое векторы? .....	122
5.2. Вычисление векторов .....	131
5.3. Геометрические интерпретации.....	133
<b>Глава 6. ЕЩЕ О ВЕКТОРАХ</b> .....	137
6.1. Линейная независимость .....	138
6.2. Базисы .....	146

6.3. Размерность .....	155
6.3.1. Подпространства .....	156
6.3.2. Базис и размерность.....	162
6.4. Координаты .....	167

## **Глава 7. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.....** 169

7.1. Что такое линейное преобразование? .....	172
7.2. Почему мы изучаем линейные преобразования .....	179
7.3. Специальные преобразования .....	184
7.3.1. Масштабирование .....	185
7.3.2. Вращение.....	186
7.3.3. Перенос .....	188
7.3.4. 3D-проекция.....	191
7.4. Некоторые предварительные подсказки .....	194
7.5. Ядро, образ и теорема размерности для линейных преобразований .....	195
7.6. Ранг.....	199
7.6.1. Ранг.....	200
7.6.2. Вычисление ранга матрицы.....	204
7.7. Отношения между линейными преобразованиями и матрицами.....	212

## **Глава 8. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ.....** 213

8.1. Что такое собственные числа и собственные векторы.....	219
8.2. Вычисление собственных чисел и собственных векторов .....	224
8.3. Вычисление степени $p$ матрицы $n \times n$ .....	227
8.4. Повторяемость и приведение к диагональному виду.....	232
8.4.1. Матрица простой структуры с собственным числом, имеющая повторяемость $2$ .....	233
8.4.2. Недиагонализированная матрица с собственным числом, имеющая повторяемость $2$ .....	235

## **Эпилог.....** 238

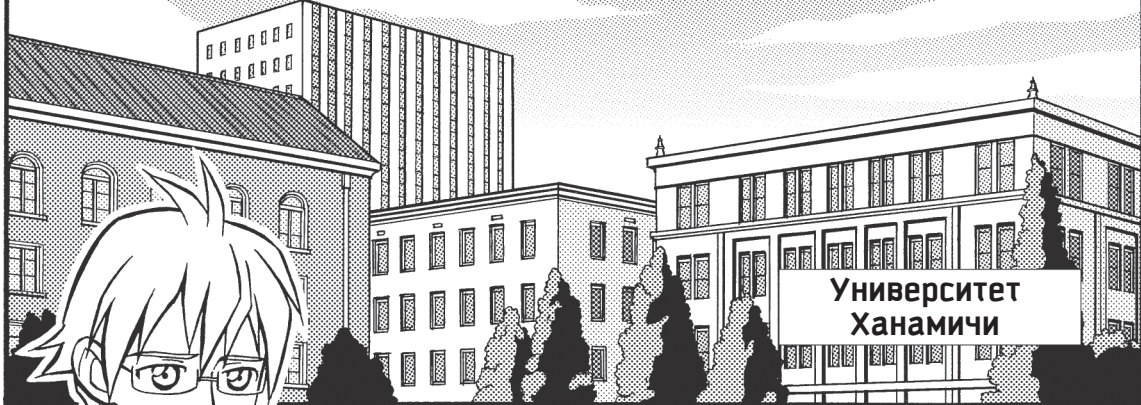
## **Приложение. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.....** 251

## **ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....** 261

ПРОЛОГ

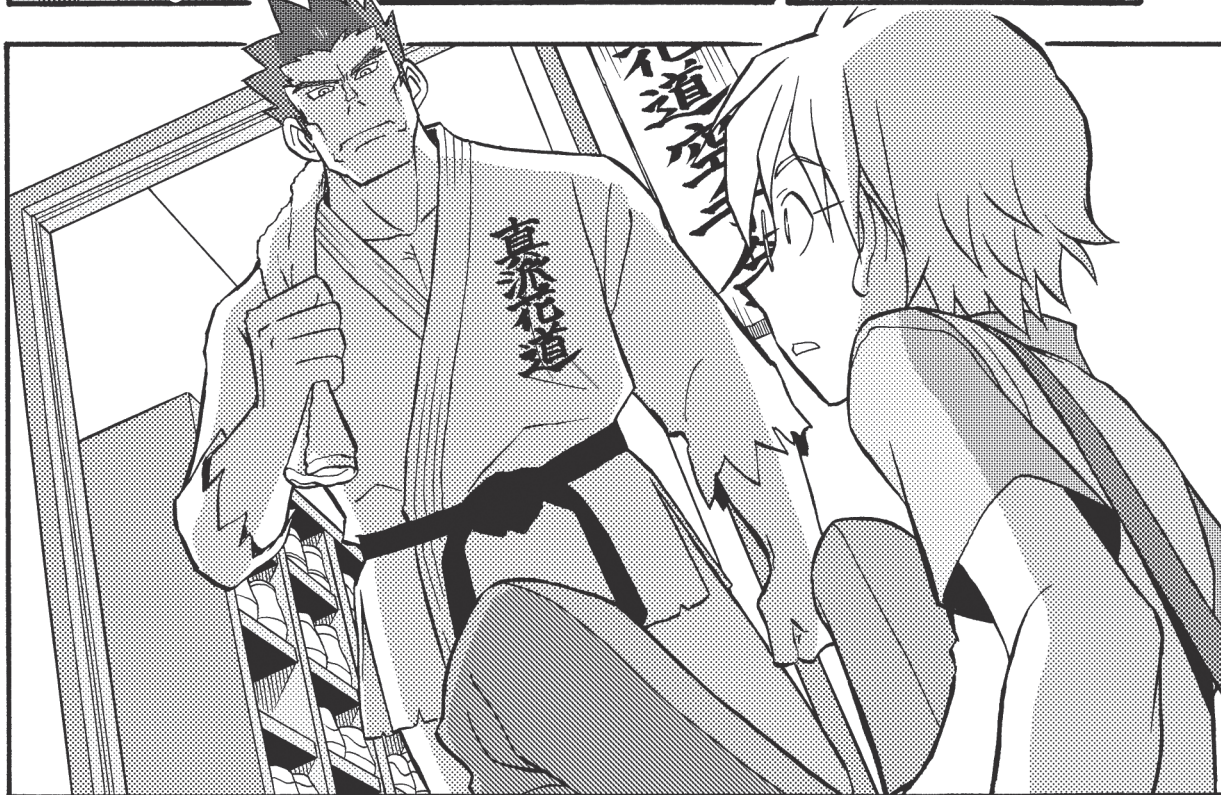
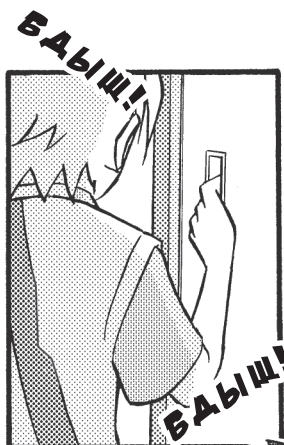
ЗАНЯТИЯ НАЧИНАЮТСЯ!





ЛАДНО!

СЕЙЧАС ИЛИ НИКОГДА!





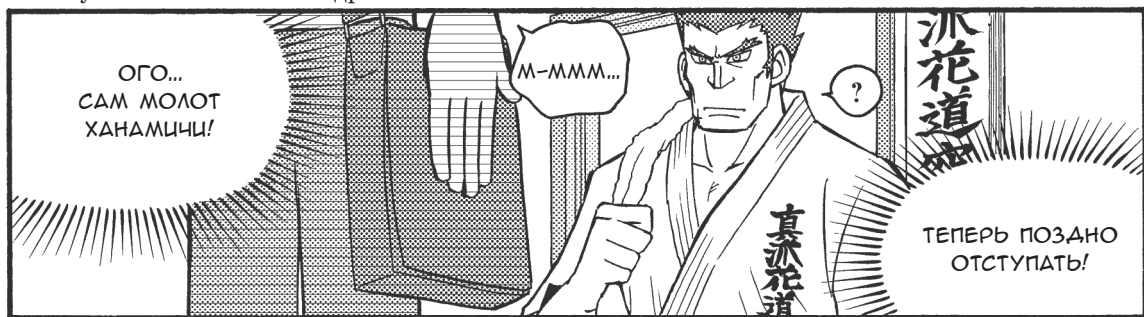
я...  
я НОВЕНЬКИЙ...  
МЕНЯ ЗОВУТ  
РЕЙХИ ЮУРИНО.

ВЫ СЛУЧАЙНО  
НЕ КАПИТАН КЛУБА  
ТЭТСУО\* ИЧИНОСЭ?



ОН САМЫЙ.

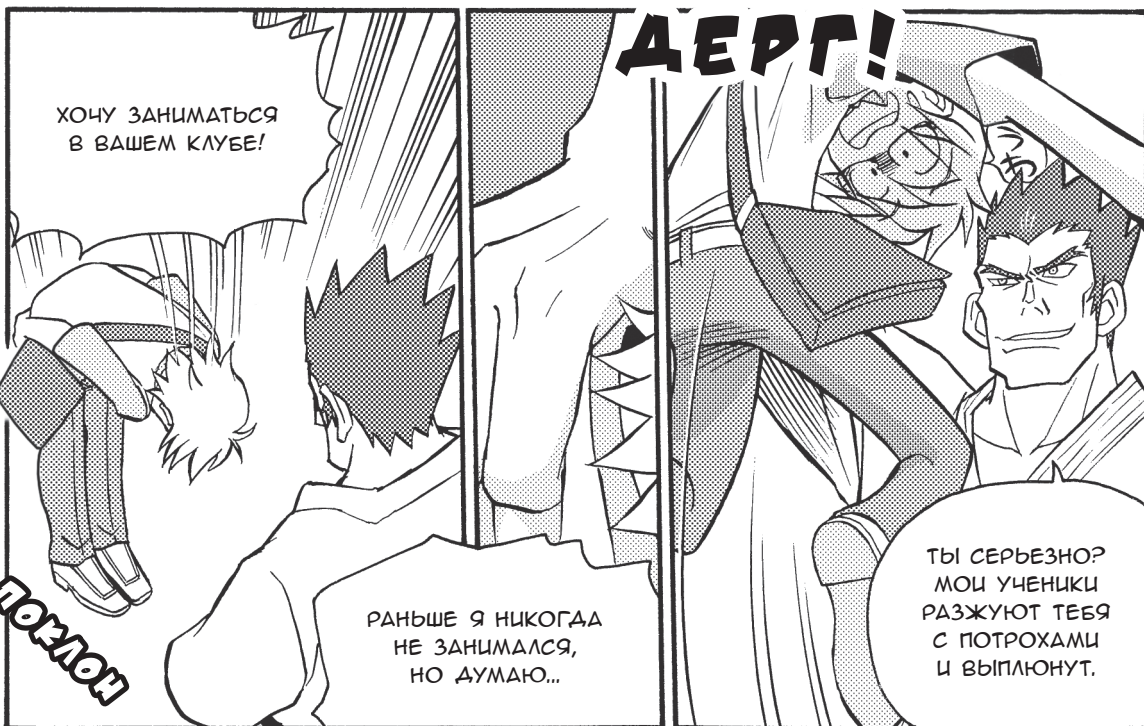
\* Тэтсуо означает «человек дракона».



ОГО...  
САМ МОЛОТ  
ХАНАМИЧИ!

М-МММ...

ТЕПЕРЬ ПОЗНАНО  
ОТСТУПАТЬ!



ХОЧУ ЗАНИМАТЬСЯ  
В ВАШЕМ КЛУБЕ!

**ДЕРР!**

РАНЬШЕ Я НИКОГДА  
НЕ ЗАНИМАЛСЯ,  
НО ДУМАЮ...

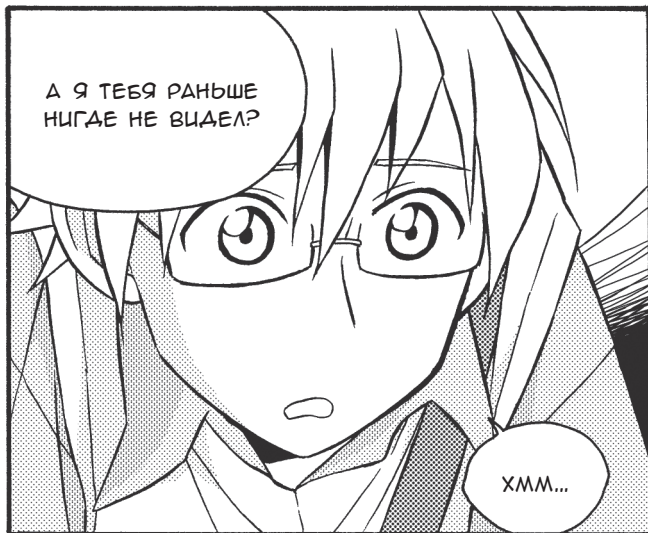
ТЫ СЕРЬЕЗНО?  
МОИ УЧЕНИКИ  
РАЗЖУЮТ ТЕБЯ  
С ПОТРОХАМИ  
И ВЫПЛЮНУТ.






ПРОШУ ВАС! Я...

Я ХОЧУ СТАТЬ Сильным!





НЕ ТОТ ЛИ ТЫ ПАРЕНЬ  
С ОБЛОЖКИ УЧЕБНИКА  
ПО МАТЕМАТИКЕ  
МОЕЙ СЕСТРЫ?



О, ВЫ ВИДЕЛИ  
МОЙ УЧЕБНИК?



ЗНАЧИТ, ЭТО ТЫ!



А-ДА.

МОЖЕТ,  
Я ФИЗИЧЕСКИ  
И НЕ ТАК СИЛЕН...



...НО ВСЕГДА  
С ЛЕГКОСТЬЮ  
СПРАВЛЯЛСЯ  
С ЧИСЛАМИ.

ПОНЯТНО...

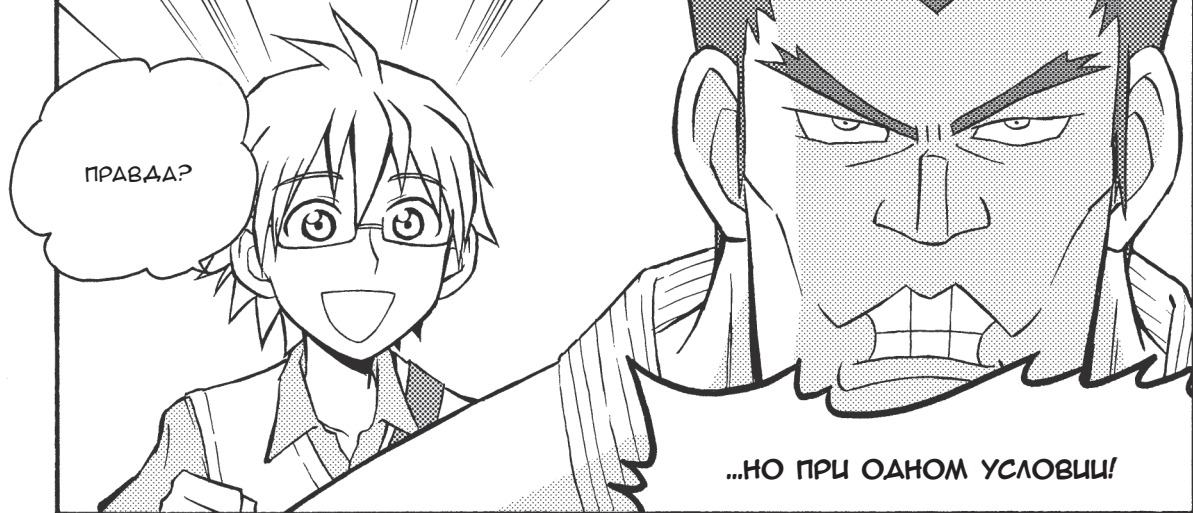


ГММ

ВОЗМОЖНО,  
Я И ВОЗЬМУ ТЕБЯ  
В КЛУБ...



ААА



...НО ПРИ ОДНОМ УСЛОВИИ!

БУДЕШЬ УЧИТЬ  
МОЮ СЕСТРЕНКУ  
МАТЕМАТИКЕ.

ОНА-ТО ВОТ  
НИКОГДА  
НЕ БЫЛА  
СЛЫБНА  
В ЧИСЛАХ...



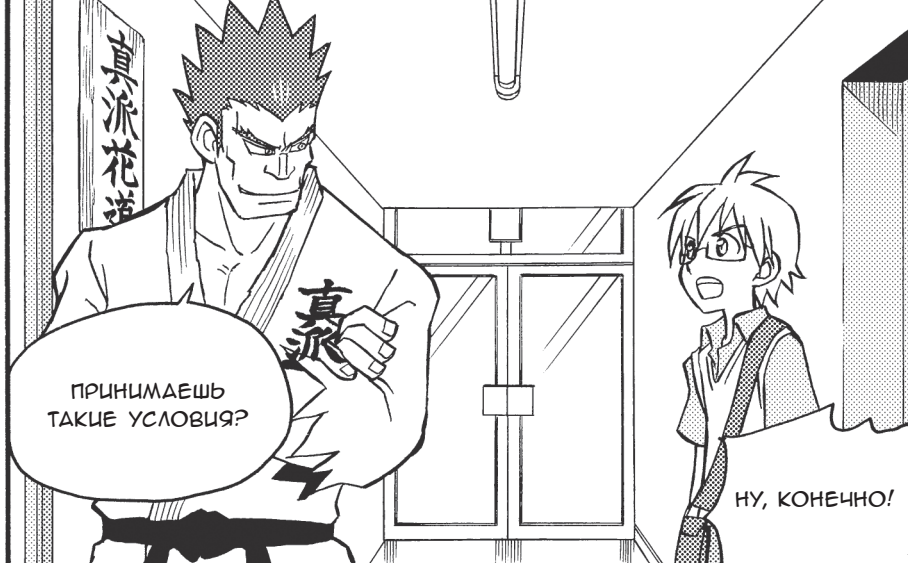
*И только вчера  
жаловалась, что у нее  
проблемы на занятиях  
по линейной алгебре...*



эээ



ЗНАЧИТ,  
ЕСЛИ Я ПОМОГУ  
ВАШЕЙ СЕСТРЕ,  
ВЫ ВОЗЬМЕТЕ  
МЕНЯ В КЛУБ?



ПРИНИМАЕШЬ  
ТАКИЕ УСЛОВИЯ?

НУ, КОНЕЧНО!

НО ДОЛЖЕН  
ТЕБЯ  
ПРЕДУПРЕДИТЬ...



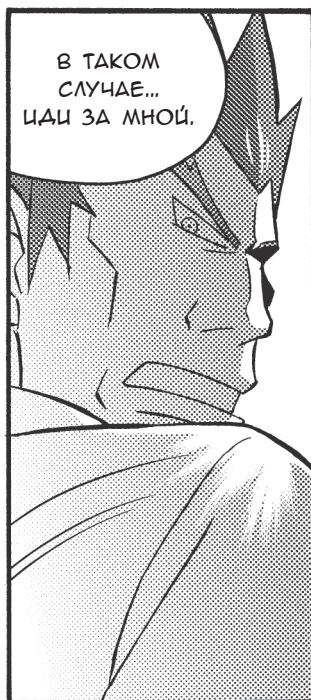
ПОПРОБУЕШЬ  
К НЕЙ ПОДКАТИТЬ...

ХОТЬ РАЗ...

**ХРУСТЬ!**

**ЩЕЛК!**

И НЕ  
ПОДУМАЮ!



В ТАКОМ  
СЛУЧАЕ...  
ЦАИ ЗА МНОЙ.



С ТОВОЙ ТУТ  
ЦЕРЕМОНИТЬСЯ  
НЕ БУДУТ.

ЯСНОЕ  
ДЕЛО!

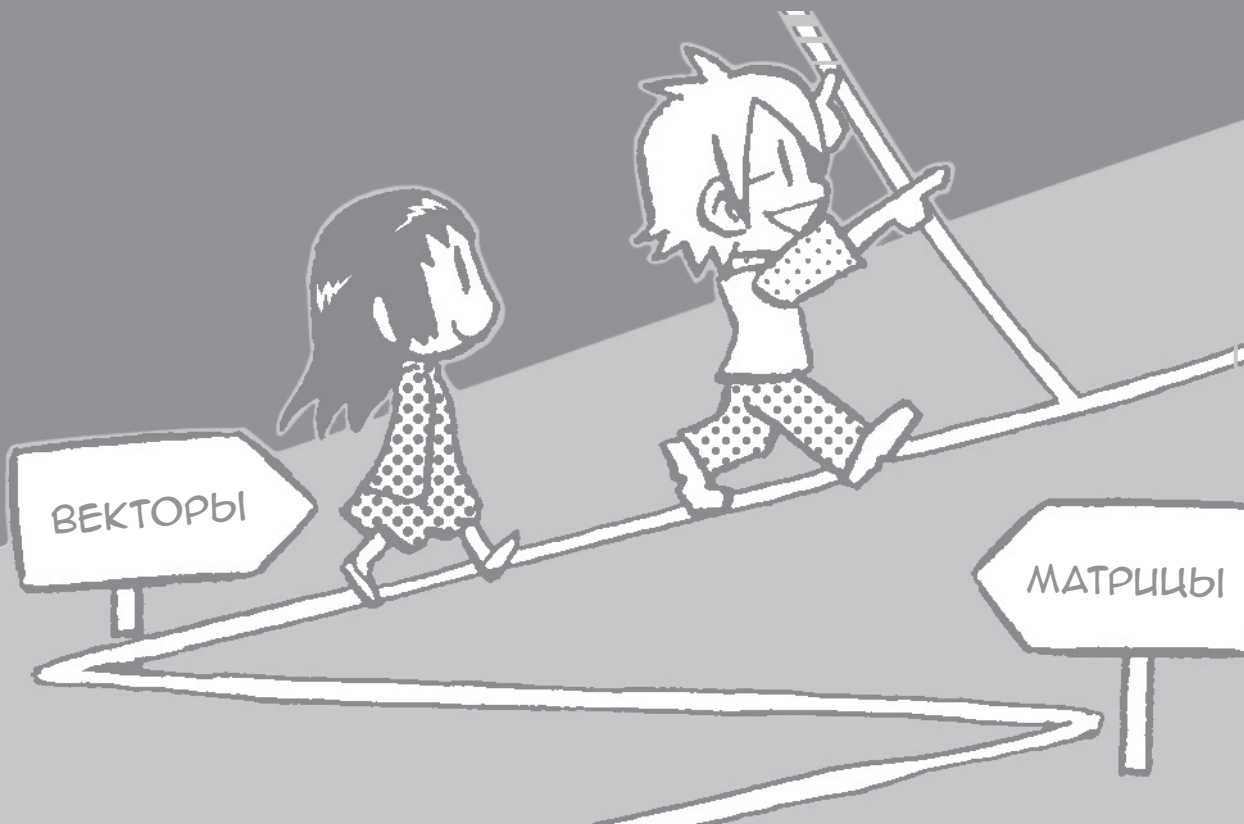


ПРЯМО СЕЙЧАС  
И НАЧНЕМ!

МЕНЯ ПРИНЯЛ!

## ГЛАВА 1

# ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА?



НУ, ЧТО!  
НА СЕГОДНЯ ВСЁ!

ОССУ!\*

ПЫХ!  
ПЫХ!

\* Оссу – междометие, которое часто используется в японских единоборствах, чтобы повысить концентрацию и силу удара.

ПОКЛОН!

ОССУ!  
СПАСИБО!

ЮУРИНООО!

живой?

О-ОССУ...

**ХВАТЬ!**

真

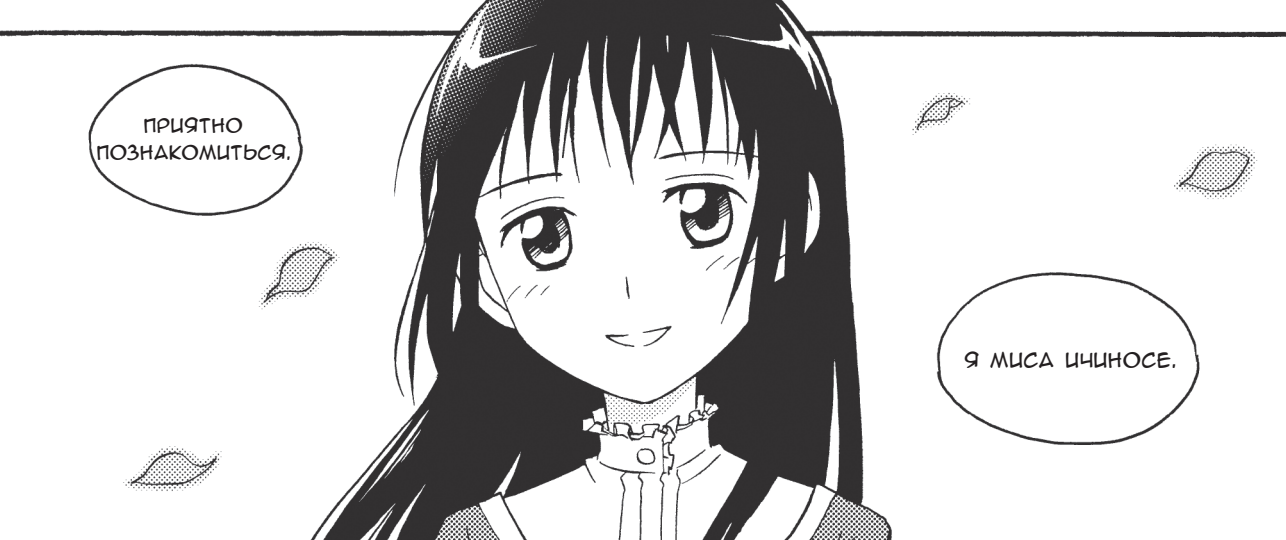
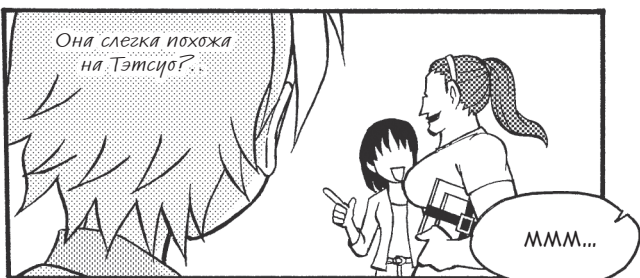
МОЖЕШЬ НАЧИНАТЬ  
ЗАНЯТИЯ С МОЕЙ СЕСТРОЙ,  
НО СНАЧАЛА УБЕРИ ЗАЛ  
И РАЗЛОЖИ ВСЕ КАК НАДО,  
ПОНЯЛ?

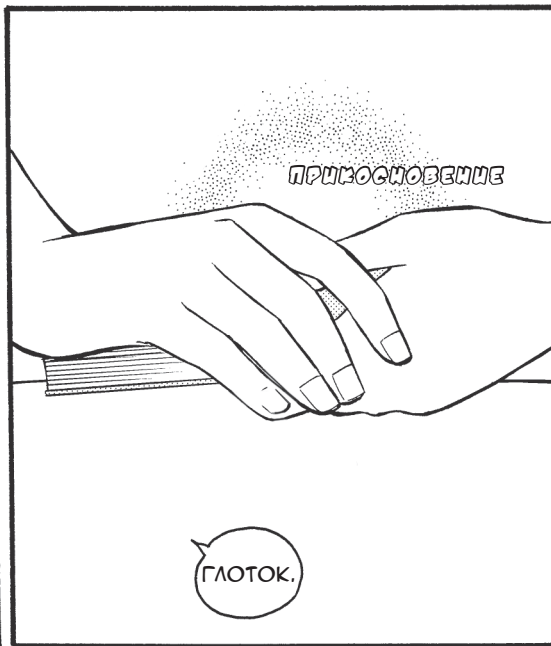
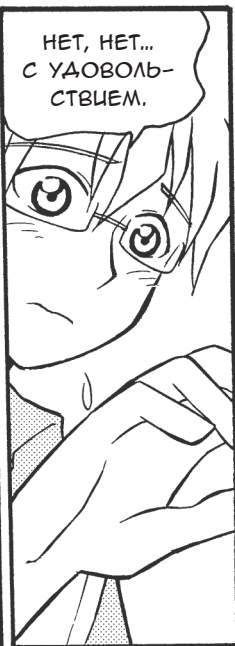
Она тоже новичок  
и нас, но так как  
вас тут что-то  
много в этом году,  
сомневаюсь,  
что вы знакомы

**ДРОЖЬ**

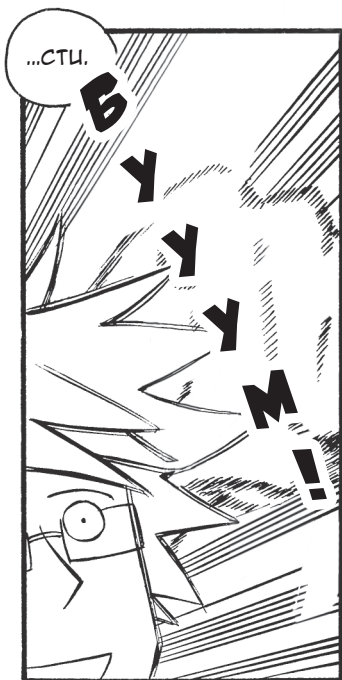
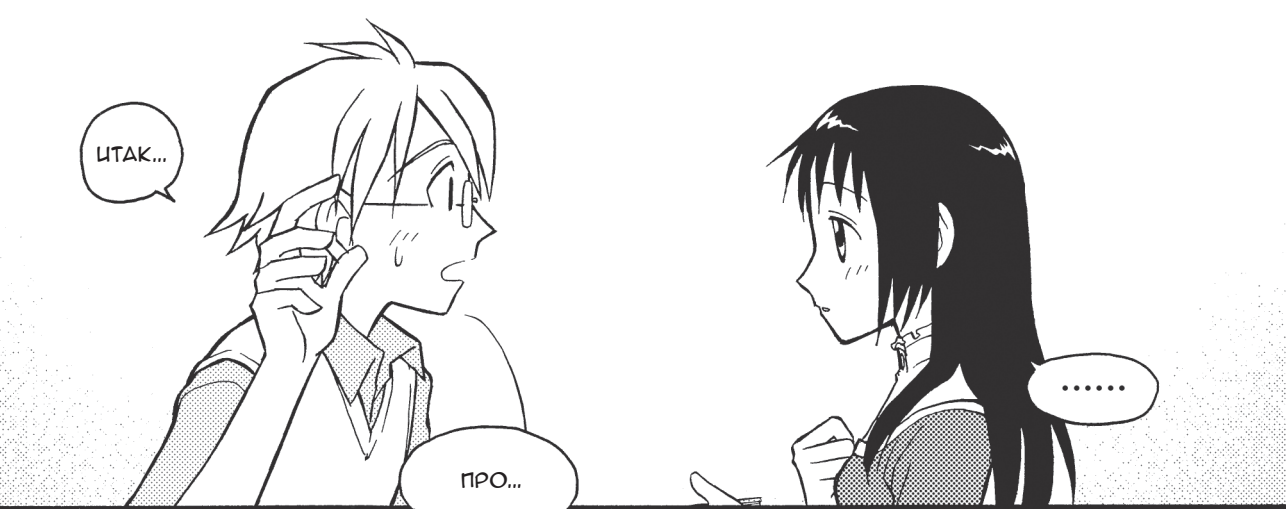
**ТЯСЯКА**

Я ей сказал,  
чтобы ждала тебя в...









# 1.1. КРАТКИЙ ОБЗОР КУРСА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

НУ ЧТО,  
КОГДА ТЫ  
ХОЧЕШЬ НАЧАТЬ?

МОЖЕТ,  
ПРЯМО  
СЕЙЧАС?

ТАК...

ТВОЙ БРАТ СКАЗАЛ,  
ЧТО У ТЕБЯ ПРОБЛЕМЫ  
С ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРОЙ?

АА.

МНЕ НЕПОНЯТЕН  
СМЫСЛ ВСЕГО  
ЭТОГО...

И ВООБЩЕ,  
ВЫЧИСЛЕНИЯ МНЕ  
НЕ ДАЮТСЯ.

ЭТО ПРАВАА...  
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА -  
НЕСКОЛЬКО  
АБСТРАКТНАЯ  
ДИСЦИПЛИНА,

И ЕСТЬ НЕКОТОРЫЕ  
ВЕЩИ, КОТОРЫЕ  
ТРУДНО ПОНЯТЬ...

БАЗИС

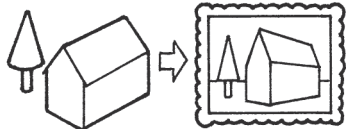
ЛИНЕЙНАЯ  
НЕЗАВИСИМОСТЬ

ПОДПРОСТРАНСТВО

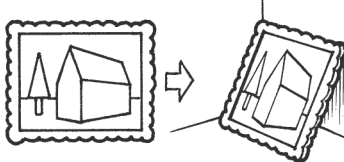
НО!



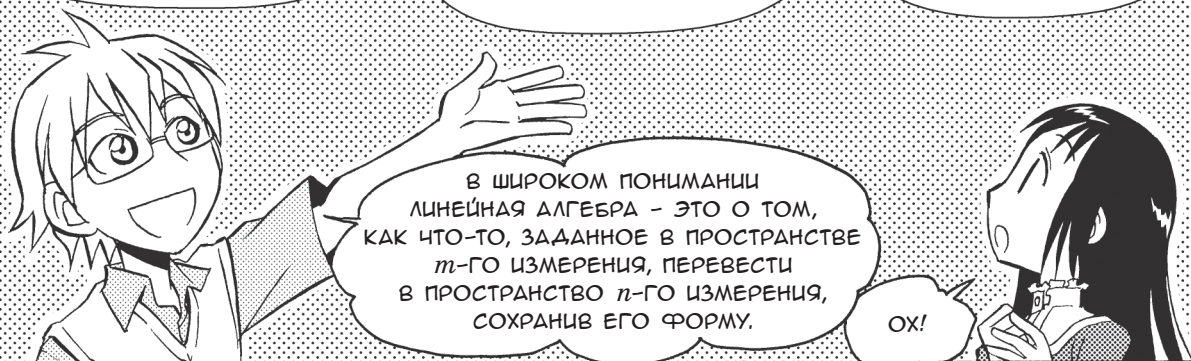
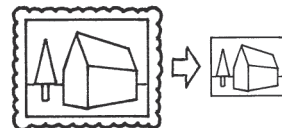
От трех  
к двум измерениям



От двух  
к трем измерениям



От двух к тем же  
двум измерениям



МЫ БУДЕМ  
УЧИТЬСЯ  
РАБОТАТЬ  
С МАТРИЦАМИ...

Матрицы

Векторы

...И ВЕКТОРАМИ.

С ТЕМ, ЧТОБЫ ОСВОИТЬ  
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ,  
ТАКЕ КАК:

- ЛИНЕЙНЫЕ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ;
- СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА  
И СОБСТВЕННЫЕ  
ВЕКТОРЫ.

Линейные  
преобразования

Собственные числа  
и собственные векторы

Векторы

Матрицы

ПОНЯТНО...



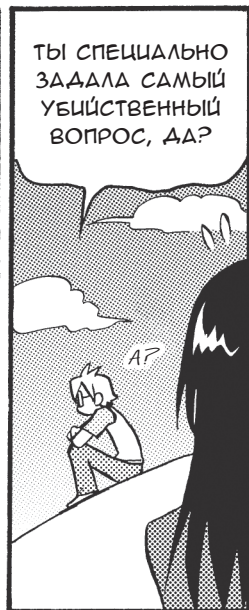
ИТАК...

?



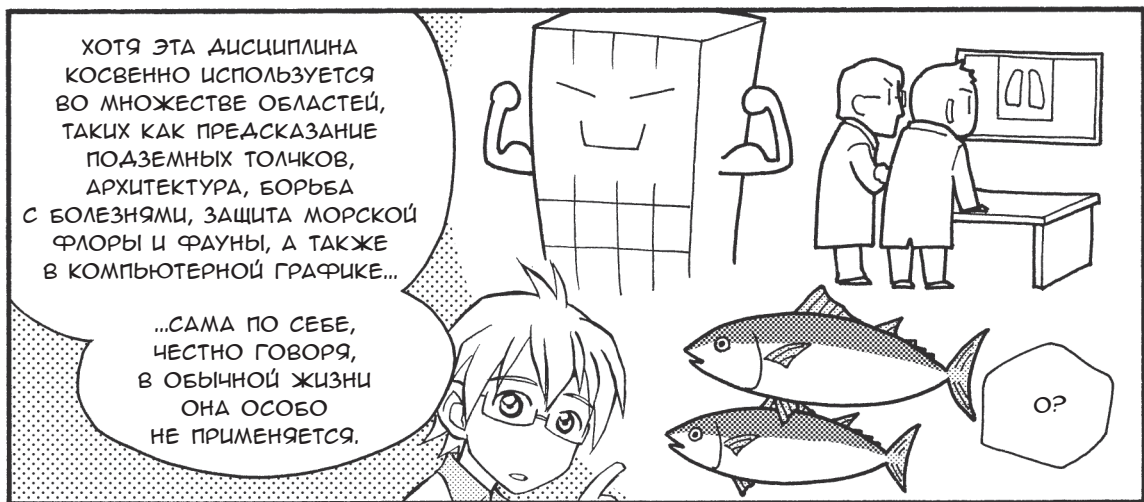
А ГДЕ ЭТО ВСЕ ЕЩЕ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ?  
КРОМЕ КАК В НАУЧНЫХ ЦЕЛЯХ,  
КОНЕЧНО.

.....



ТЫ СПЕЦИАЛЬНО  
ЗАДАЛА САМЫЙ  
УБИЙСТВЕННЫЙ  
ВОПРОС, ДА?

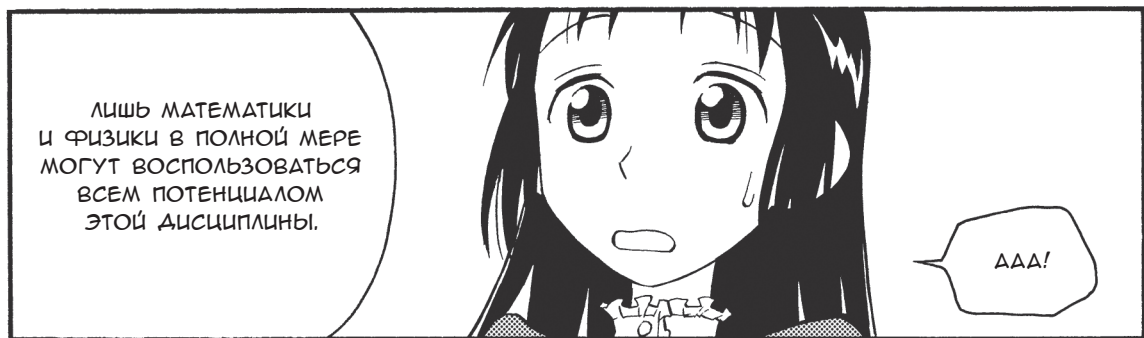
А?



ХОТЯ ЭТА ДИСЦИПЛИНА  
КОСВЕННО ИСПОЛЬЗУЕТСЯ  
ВО МНОЖЕСТВЕ ОБЛАСТЕЙ,  
ТАКИХ КАК ПРЕДСКАЗАНИЕ  
ПОДЗЕМНЫХ ТОЧЕК,  
АРХИТЕКТУРА, БОРЬБА  
С БОЛЕЗНЯМИ, ЗАЩИТА МОРСКОЙ  
ФЛОРЫ И ФАУНЫ, А ТАКЖЕ  
В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ...

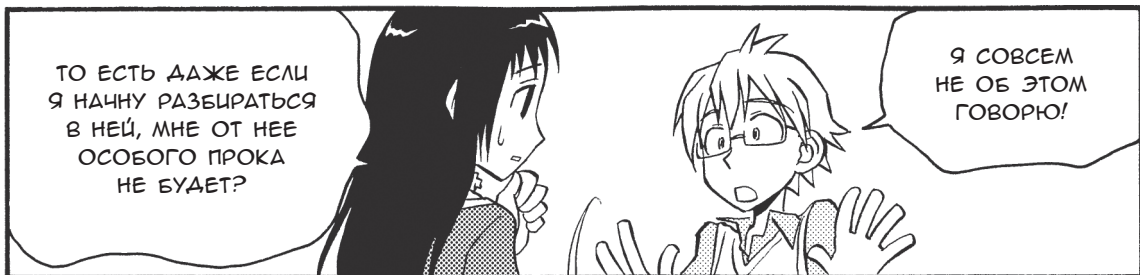
...САМА ПО СЕБЕ,  
ЧЕСТНО ГОВОРЯ,  
В ОБЫЧНОЙ ЖИЗНИ  
ОНА ОСОБО  
НЕ ПРИМЕНЯЕТСЯ.

О?



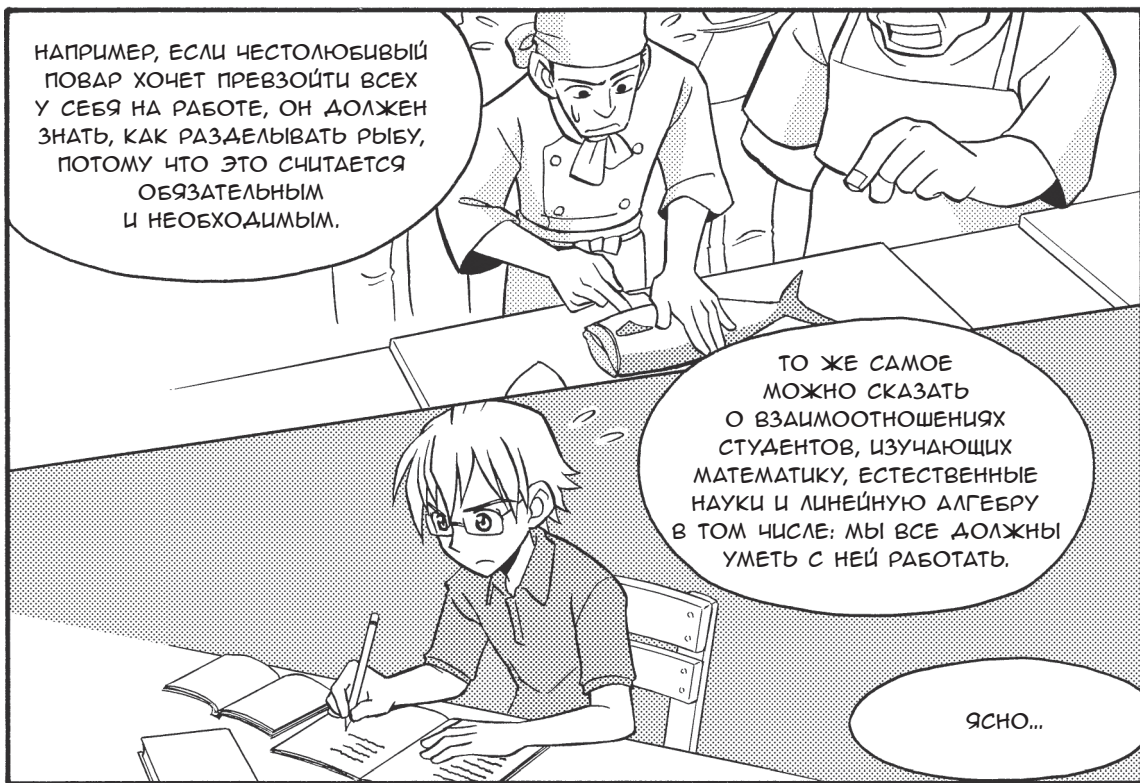
ЛИШЬ МАТЕМАТИКИ  
И ФИЗИКИ В ПОЛНОЙ МЕРЕ  
МОГУТ ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ  
ВСЕМ ПОТЕНЦИАЛОМ  
ЭТОЙ ДИСЦИПЛИНЫ.

ААА!



ТО ЕСТЬ ДАЖЕ ЕСЛИ  
Я НАЧНУ РАЗБИРАТЬСЯ  
В НЕЙ, МНЕ ОТ НЕЕ  
ОСОБОГО ПРОКА  
НЕ БУДЕТ?

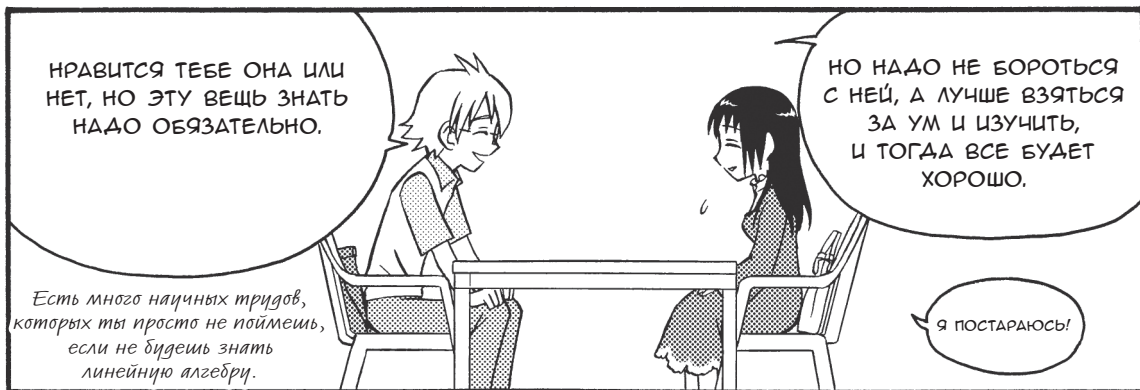
Я СОВСЕМ  
НЕ ОБ ЭТОМ  
ГОВОРЮ!



НАПРИМЕР, ЕСЛИ ЧЕСТОЛЮБИВЫЙ  
ПОВАР ХОЧЕТ ПРЕВЗОЙТИ ВСЕХ  
У СЕБЯ НА РАБОТЕ, ОН ДОЛЖЕН  
ЗНАТЬ, КАК РАЗДЕЛЫВАТЬ РЫБУ,  
ПОТОМУ ЧТО ЭТО СЧИТАЕТСЯ  
ОБЯЗАТЕЛЬНЫМ  
И НЕОБХОДИМЫМ.

ТО ЖЕ САМОЕ  
МОЖНО СКАЗАТЬ  
О ВЗАИМООТНОШЕНИЯХ  
СТУДЕНТОВ, ИЗУЧАЮЩИХ  
МАТЕМАТИКУ, ЕСТЕСТВЕННЫЕ  
НАУКИ И ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ  
В ТОМ ЧИСЛЕ: МЫ ВСЕ ДОЛЖНЫ  
УМЕТЬ С НЕЙ РАБОТАТЬ.

ЯСНО...



ПРАВИТСЯ ТЕБЕ ОНА ИЛИ  
НЕТ, НО ЭТУ ВЕЩЬ ЗНАТЬ  
НАДО ОБЯЗАТЕЛЬНО.

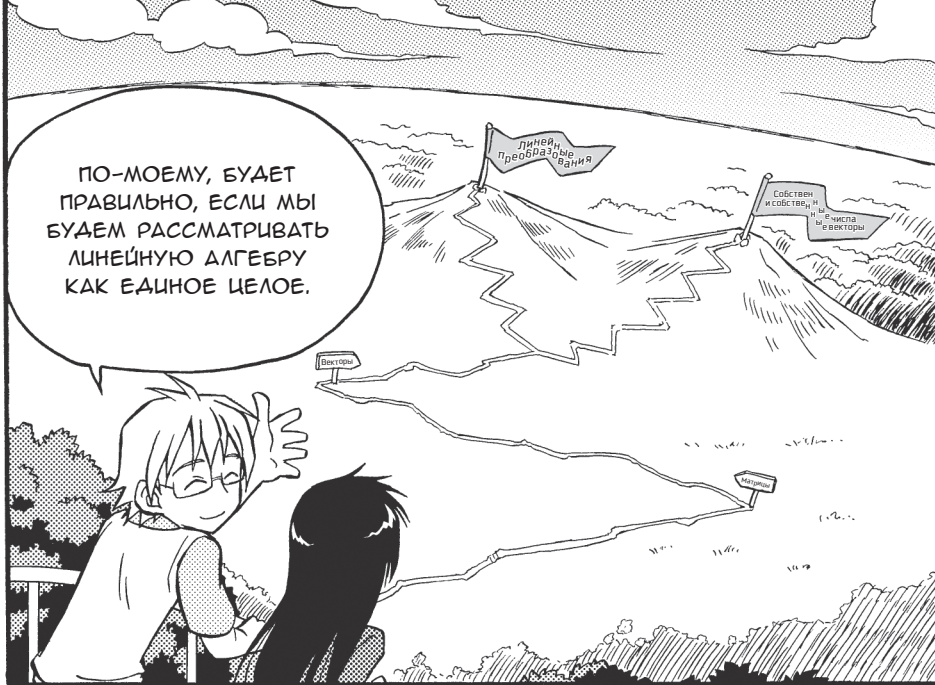
НО НАДО НЕ БОРОТЬСЯ  
С НЕЙ, А ЛУЧШЕ ВЗЯТЬСЯ  
ЗА УМ И ИЗУЧИТЬ,  
И ТОГДА ВСЕ БУДЕТ  
ХОРОШО.

*Есть много научных трудов,  
которых ты просто не поймешь,  
если не будешь знать  
линейную алгебру.*

Я ПОСТАРАЮСЬ!



ЧТО КАСАЕТСЯ  
НАШИХ ЗАНЯТИЙ...



ПО-МОЕМУ, БУДЕТ  
ПРАВИЛЬНО, ЕСЛИ МЫ  
БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ  
ЛИНЕЙНУЮ АЛГЕБРУ  
КАК ЕДИНОЕ ЦЕЛОЕ.



БОЛЬШИНСТВО УЧЕБНИКОВ  
И КУРСОВ ПО ЭТОМУ  
ПРЕДМЕТУ ПОДРАЗУМЕВАЮТ  
ДЛИННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
И ПОДРОБНЫЕ  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

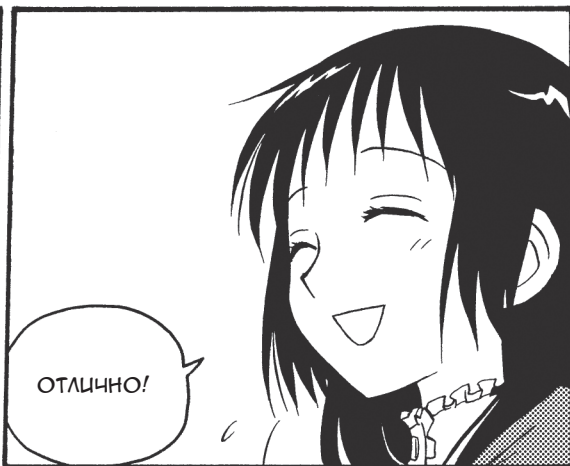


Я ПОСТАРАЮСЬ  
ПО ВОЗМОЖНОСТИ  
ИЗБЕЖАТЬ ЭТОГО...

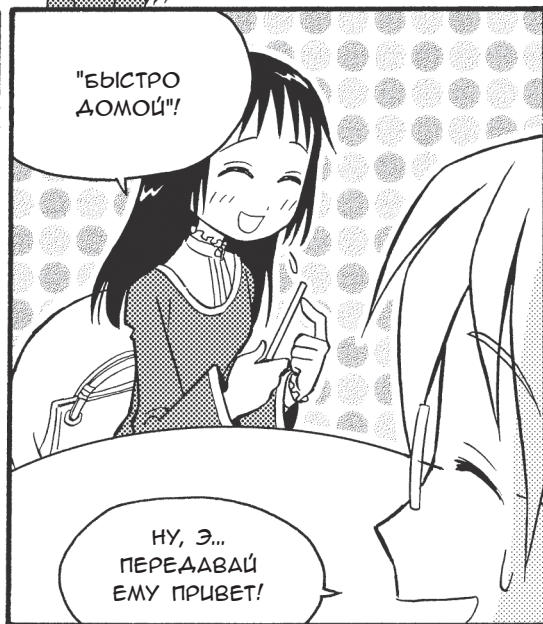
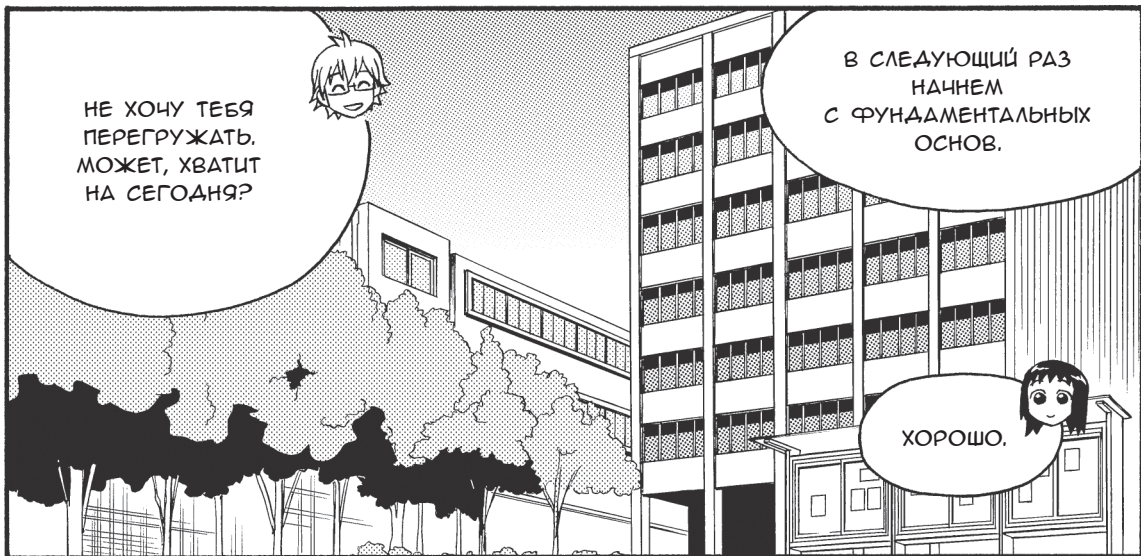
Фью-ють!



...И  
СОСРЕДОТОЧИТЬСЯ  
НА ОБЪЯСНЕНИИ  
ОСНОВ.



ОТЛИЧНО!





## 1.2. ТЕМЫ, КОТОРЫЕ ВАЖНЫ ДЛЯ НАУКИ, И ТЕМЫ, КОТОРЫЕ ПОПАДАЮТСЯ НА ЭКЗАМЕНАХ

В таблице ниже приведены темы, которые могут попасться в экзаменах по линейной алгебре.

	Где найти
Нахождение обратной матрицы методом Гаусса	Глава 4
Нахождение значения определителя	Глава 4
Решение системы линейных уравнений методом Крамера	Глава 4
Нахождение собственного вектора и собственного числа	Глава 8

Если прорешать множество таких задач в учебниках, то и на экзамене удастся с ними справиться. Но даже если вы эксперт в этой теме, то не факт, что вам понятны линейные преобразования – главная задача линейной алгебры. Дело в том, что на экзаменах по линейной алгебре спрашивают совершенно другие темы.

В жизни можно:

- 1) получить хорошие оценки на экзамене по линейной алгебре и понимать линейные преобразования;
- 2) получить хорошие оценки на экзамене по линейной алгебре, но не понимать линейные преобразования;
- 3) провалиться на экзамене по линейной алгебре, но понимать линейные преобразования;
- 4) провалиться на экзамене по линейной алгебре и не понимать линейные преобразования.

Таковы четыре возможных варианта. Если мыслить здраво, с учетом необходимости для работы и дальнейшей учебы, варианты 1 и 2 принесут для студента больше всего пользы. Я согласен, конечно, что вариант 1 лучше всего. Но с вариантом 2 я согласиться не могу. Ведь это все равно, что не видеть леса за деревьями. Иными словами, в этом случае сразу после выпуска от знаний по линейной алгебре в голове останется только то, что это какая-то непонятно зачем нужная чушь. Жизнь длинная. И я полагаю, что вариант 3 сделает дальнейшую жизнь человека более счастливым, чем вариант 2.

Прошу вас прочитать эту главу. А после прочтения сразу же выкинуть ее из головы. Если вы этого не сделаете, то дальнейшее понимание манги будет затруднено. Многие читатели подумают, а не пропустить ли вообще эту главу? Но как автор я бы хотел, чтобы вы ее прочитали.

### 1.3.1. Линейное пространство, как его видят математики

Ниже будет сказано, что линейная алгебра – это мостик из  $n$ -мерного в  $m$ -мерный мир. В принципе, в этой книжке и далее проблем с этим не будет. Однако математики считают иначе. С их точки зрения, линейная алгебра – это наука, которая занимается линейным пространством, как показано в рамочке на следующей странице. Векторы, о которых идет речь на следующей странице, значительно отличаются от векторов:

- в курсе школьной математики<sup>1</sup>;
- о которых идет речь в главе 4 «Векторы» и других частях этой книги, поскольку это более абстрактные и высокоуровневые понятия.

Хотя бы кто-нибудь из читателей может понять, о чем идет речь на следующей странице?

Если нет, то вздохните с облегчением. Это нормально – не понимать, да и смысла не имеет, если только вы не математик. Однако иметь представление о том, что в бейсболе есть бейсбольное поле, в гольфе – поле для гольфа, а в линейной алгебре – линейное пространство, не так уж и бесполезно.

Но раз уж нам представилась возможность, то приведем пример линейного пространства. Так, например, «множество многочленов  $n$ -й степени с действительными коэффициентами» вроде  $7t^4 - 3t - 4$  и  $2t - 1$  удовлетворяет аксиоме действительного векторного пространства. Это означает, что:

- «множество многочленов  $n$ -й степени с действительными коэффициентами» – это действительное векторное пространство;
- множество многочленов  $n$ -й степени  $7t^4 - 3t - 4$  и  $2t - 1$  представляет собой векторы.

<sup>1</sup> Для читателей примерно того же возраста, что и автор, речь идет об алгебре и геометрии.

## ■ Линейное пространство

Пусть  $x_i$ ,  $x_j$  и  $x_k$  – произвольные элементы множества  $X$ . Пусть  $c$  и  $d$  – произвольные числа.

В случае если множество  $X$  удовлетворяет следующим двум условиям: «множество  $X$  является линейным пространством» или «множество  $X$  является векторным пространством».

### Условие 1

Определим для  $x_i$  и  $x_j$  элемент  $x_i + x_j$ , называемый **суммой**. Сумма удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $(x_i + x_j) + x_k = x_i + (x_j + x_k)$ ;
- 2)  $x_i + x_j = x_j + x_i$ ;
- 3) существует  $0$ , который называется **нулевым вектором**, равным  $x_i + 0 = 0 + x_i = x_i$ ;
- 4) для  $x_i$  существует  $(-x_i)$ , который называется **обратным вектором** и для которого  $x_i + (-x_i) = (-x_i) + x_i = 0$ .

### Условие 2

Для  $x_i$  и  $c$  есть элемент  $cx_i$ , называемый **скалярным произведением**. Скалярное произведение должно удовлетворять следующим условиям:

- 5)  $c(x_i + x_j) = cx_i + cx_j$ ;
- 6)  $(cd)x_i = c(dx_i)$ ;
- 7)  $(c + d)x_i = cx_i + dx_i$ ;
- 8)  $1x_i = x_i$ .

Линейное пространство, в котором  $c$  и  $d$  – действительные числа, называется **действительным линейным пространством**, или **действительным векторным пространством**.

Линейное пространство, в котором  $c$  и  $d$  – комплексные числа, называется **комплексным линейным пространством**, или **комплексным векторным пространством**.

Условия 1–8 вместе называются **аксиомами линейного пространства**, или **аксиомами векторного пространства**. Элемент линейного пространства называется **вектором**, а константа  $c$  – **скаляром**.

### 1.3.2. Линейная алгебра и аксиомы

По некоторым причинам линейная алгебра, которую представляют себе математики, либо туманна, либо абстрактна.

Математики прошлого вывели так называемые аксиомы:

- часть больше целого;
- в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной, на основании **суждений, которые кажутся самоочевидными**.

Однако с течением времени появились вопросы:

- всегда ли целое больше, чем часть?
- правда ли, что в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной?

Поэтому математики стали оспаривать аксиомы.

Но если вы сомневаетесь в основных аксиомах, значит, и доказать вы ничего не можете. Как правило, это приводит к отказу от результатов своих и чужих исследований, которые базировались на этих аксиомах. В результате математики вывели аксиомы из разряда «само собой очевидных суждений» до «примем к сведению следующие гипотезы». Да и если дальнейшие рассуждения не противоречат этим гипотезам, то все с ними хорошо.

После того как смысл аксиом был пересмотрен, мир математики стал шире. Но вместе с тем он стал более абстрактным, оторванным от реальности.

Да, после этого пересмотра линейная алгебра стала трендом.