

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальные уравнения кажутся сложными, не так ли? Они и в самом деле сложные. Если честно, когда я ходил на лекции, я тоже не очень-то их понимал. Подобно герою этой манги, Даичи Нояма, я мог решать дифференциальные уравнения, но толком не понимал, что я делаю и почему. Я запомнил примеры решений и все формулы, решал задания из учебников, но все равно было ощущение, что я как в тумане.

Начнем с того, что решать дифференциальные уравнения действительно трудно. И так просто решения не найти. Таково распространенное мнение. Но на лекциях не дают уравнения, которые нельзя решить. А если известен способ решения какого-то дифференциального уравнения, то, значит, можно решить любое уравнение такого типа. Любой человек, разбирающийся в математике, может решить дифференциальное уравнение, если будет следовать формулам и примеру уже известных решений. Но, вступая в эту еще не привычную область математики, можно легко увязнуть в формулах и сложных преобразованиях и не видеть общей картины. В то время как, если остановиться и осмотреться, можно увидеть величественную картину.

Поэтому эта книга была написана, чтобы стать вашим путеводителем в мире дифференциальных уравнений, по которому вы будете путешествовать, следуя рекомендованному маршруту. Эта книга отличается от обычного учебника, и она не охватывает всего, что касается дифференциальных уравнений, и в ней нет строгости и универсальности, присущей учебникам. Прежде всего просто следуйте предложенному маршруту и наслаждайтесь открывающимися видами. Свободный полет в мире дифференциальных уравнений может доставить такие же захватывающие ощущения, как и реальный полет в небе. У людей нет крыльев, но они их создали и теперь могут летать по небу. Также и с помощью дифференциальных уравнений, как с помощью крыльев, можно свободно «летать» в мире математики. Я буду счастлив, если эта книга станет для вас толчком для взлета в мир дифференциальных уравнений.

В завершение я хочу от всего сердца поблагодарить сотрудников издательства Ohmsha, благодаря которым эта книга смогла появиться на свет; SWP, благодаря которому в сценарии появилась богиня цифр, что сделало книгу более увлекательной; художницу Адзума Секо, которая проделала большую работу и создала детальные иллюстрации к абстрактному миру математики. Эта книга – результат командной работы.

*Ноябрь 2009 года
Сато Минору*

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	v
Пролог	
БОГИНЯ ЦИФР ИЗ ХРАМА ЧИСЕЛ	1
Глава 1	
ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	9
Глава 2	
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АНАЛИЗА	25
1. Функции, переменные и графики	29
Экспоненциальные функции	38
Логарифмические функции	39
Тригонометрические функции	40
Гиперболические функции	41
2. Дифференциалы	42
3. Интегрирование	54
Глава 3	
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.	
МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ	69
1. Явление	72
2. Модель	74
3. Решение	78
4. Интерпретация	82
5. Закон Мальтуса	91
Явление	96
6. Радиоактивный распад	96

Модель	99
Решение.....	100
Интерпретация.....	101
7. Разные явления, одна модель	104
8. Логистическая модель.....	105

Глава 4

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

111

1. Явление.....	116
2. Модель.....	123
3. Решение	131
Итоговые вычисления	134
4. Интерпретация	136
5. Метод вариации произвольных постоянных	145

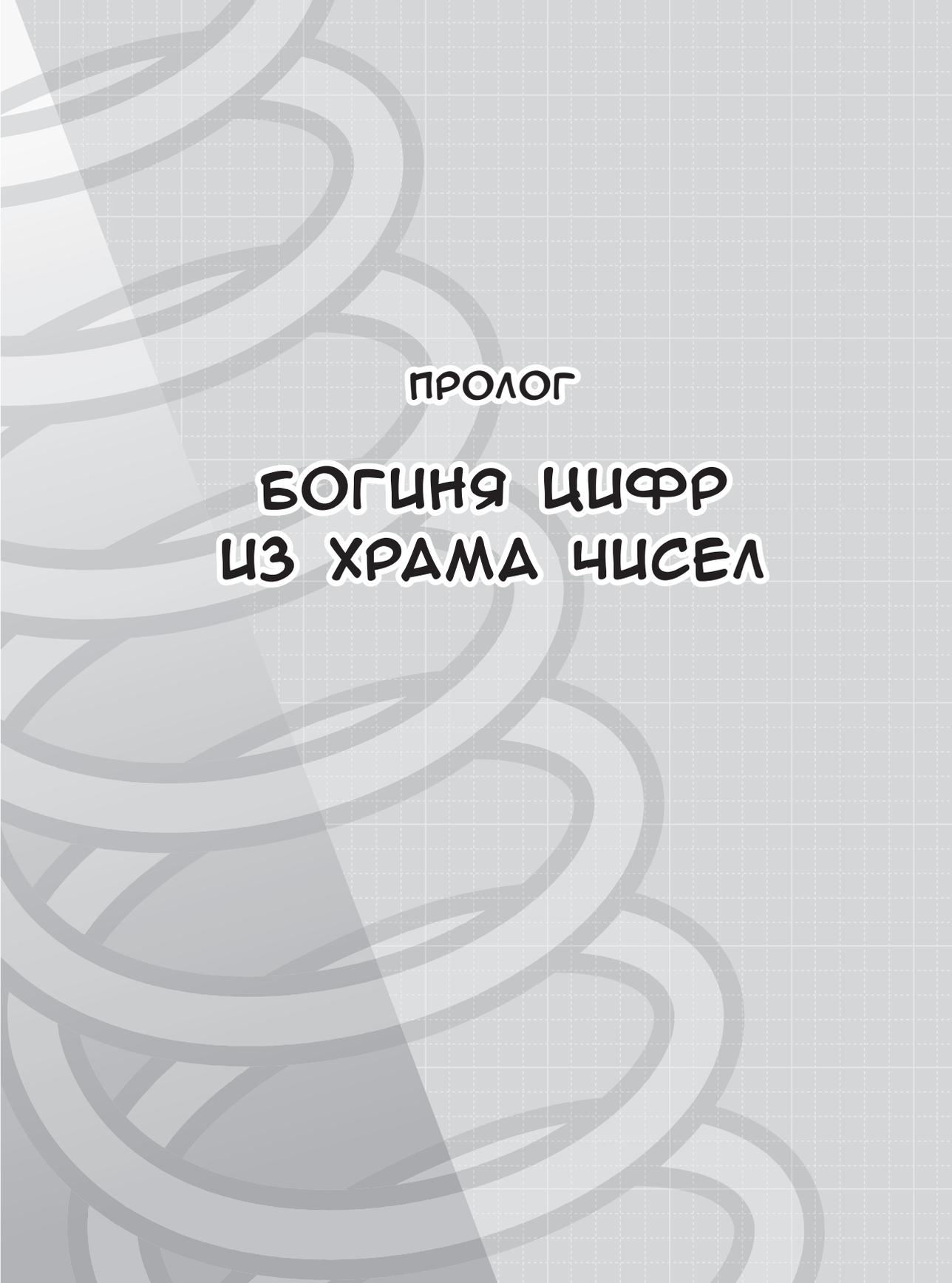
Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

151

1. Явления колебаний.....	152
2. Колебания. Модель 1	157
3. Колебания. Модель 2. Простые колебания	164
Решение задачи с учетом силы сопротивления.....	172
4. Колебания. Модель 3. Когда есть сопротивление	172
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 1 (затухающие колебания).....	180
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 2 (сильное затухание).....	185
Решение с учетом воздействия силы сопротивления. Случай 3 (критическое затухание)	190
5. Итоги. Характеристические уравнения	195
Решение с учетом воздействия внешней силы	197
6. Возвращение к модели колебаний 1 с учетом внешних сил.....	197
Интерпретация решения с учетом внешней силы.....	201

ПРИЛОЖЕНИЕ	211
1. Охлаждение кофе	212
2. Полет ракеты	215
3. Интенсивность ощущения	216
4. Эффективность рекламы	217
5. Интегрирующий множитель	222
6. Снова логистическая модель	224
АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	228



ПРОЛОГ

**БОГЦНЯ ЦИФР
ЦЗ ХРАМА ЧИСЕЛ**



ААА...

СКУКОТИЩА!!!

ХОЧЕТСЯ КУДА-ТО
ПОЙТИ
РАЗВЛЕЧЬСЯ...

Богиня цифр –
хранительница Храма чисел
(Возраст не известен)



Эй, мидзуки!

ДАЙ-КА МНЕ
ВСЕЛИТЬСЯ В ТЕБЯ.

Я ХОЧУ ВЫЙТИ
ИЗ ХРАМА.

НИКАК НЕЛЬЗЯ,
ГОСПОЖА БОГИНЯ
ЦИФР, ЭТО ОЧЕНЬ
ТЯЖЕЛО ДЛЯ МЕНЯ.

Мидзуки – служанка
при Храме чисел

ДА И КРОМЕ ТОГО,
НЕЛЬЗЯ ОСТАВЛЯТЬ
ХРАМ БЕЗ БОЖЕСТВА.

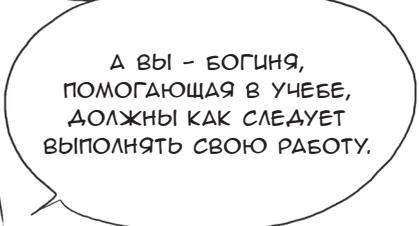
НО ВЕДЬ
ПОСЕТИТЕЛЕЙ НЕТ,
И МНЕ ВСЕ РАВНО
НЕЧЕГО ДЕЛАТЬ...

ЖАДИНА...

MMM



прогуляла





НИЧЕГО
НЕ ПОДЕЛАЕШЬ...



НУ ХОРОШО,
ЕСЛИ ВЫПОЛНИТЕ
ПРОСЬБУ СЛЕДУЮЩЕГО
ПОСЕТИТЕЛЯ, ТО Я,
ТАК И БЫТЬ,

РАЗРЕШУ
ИСПОЛЬЗОВАТЬ
СВОЕ ТЕЛО
НА ОДИН ДЕНЬ.

ПРАВДА?!



ОТЛИЧНО, Я ИСПОЛНЮ!!!
ОБЯЗАТЕЛЬНО ИСПОЛНЮ!!!

ПОДОЖДИ И УВИДИШЬ!



ХЛОП

Второкурсник
Нояма Даичи



ЧТО-ТО
НЕ МОГУ

РАЗОБРАТЬ,
ЧЕГО ОН ХОЧЕТ...
НУ ДА ЛАДНО.



ТЕБЯ-ТО Я
И ПОАЖДАЛА,

ПОТЕРЯННЫЙ
ЮНОША!

НУ,

СКАЖИ МНЕ
СВОЕ ЖЕЛАНЦЕ!

ЧТО?!



ВЫ... ВЫ КТО?...

ЭТО НЕ ВАЖНО,
СКАЖИ МНЕ
СВОЕ ЖЕЛАНЦЕ!

НУ... ЭТО...
КАК ЕГО...

ЧТО ТАКОЕ?

ПОУМНЕТЬ БЫ...

МНЕ...

НЕ ПРИКЛАДЫВАЙСЯ!!

А, ДАВАЙ,
УЧИСЬ КАК СЛЕДУЕТ!!!

ОЙ, ПРОСТИТЕ...
ПРОСТИТЕ...

ГОСПОЖА
БОГИНЯ!!

НО ВЕДЬ ЭТО
УЖ СЛИШКОМ,
ПРОСИТЬ О ТАКОМ!

МОЛОДОЙ ЧЕЛОВЕК,
СКАЖИТЕ, ПОЧЕМУ
ВЫ ХОТИТЕ ИМЕННО
ЭТОГО?

НУ, ЭТО...

Я ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ НУ НИКАК
НЕ МОГУ ПОНЯТЬ...

КОГДА САМ
ПЫТАЮСЬ РЕШАТЬ,
ТО СОВСЕМ НЕ
ПОНИМАЮ, ЧТО ДЕЛАТЬ...

ПОЭТОМУ ХОТЕЛОСЬ
БЫ ХОТЬ НЕМНОГО
ПОЛУЧШЕ
СООБРАЖАТЬ...

ХММ...

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ?..

НУ ЧТО Ж,
ХОРОШО.

Я УСЛЫШАЛА
ТВОЕ ПОЖЕЛАНИЕ.

ММ?



Я ОБЪЯСНЮ ТЕБЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ!

А ТЫ УЖ ПОСТАРАЙСЯ
КАК СЛЕДУЕТ
РАЗОБРАТЬСЯ!

ДА..

П...ПРАВДА?



ТАК ЗАОРОВО,
ПРАВДА,
МОЛОДОЙ
ЧЕЛОВЕК!

МЕНЯ ЗОВУТ
МИЦЗУКИ,
Я ПРИСЛУЖИВАЮ
В ЭТОМ ХРАМЕ.

А....
Я НОЯМА ДАЦЧИ.

ЭЭ..



А ВОТ ЭТА
ДЕВУШКА,
ЭТО...?

ЭТО БОГИНЯ
ЦИФР, ОНА
ХРАНИТЕЛЬНИЦА
ЭТОГО ХРАМА.

ДРУГИМИ
СЛОВАМИ,
ОНА БОЖЕСТВО.

ОТЛИЧНО,
ЗА РАБОТУ!

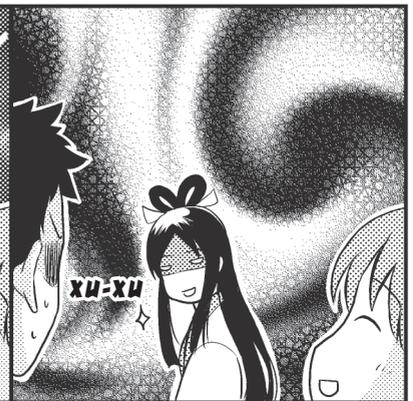


ЧТО?!..

БОГИНЯ?!

АТА

НЕУЖЕЛИ?!

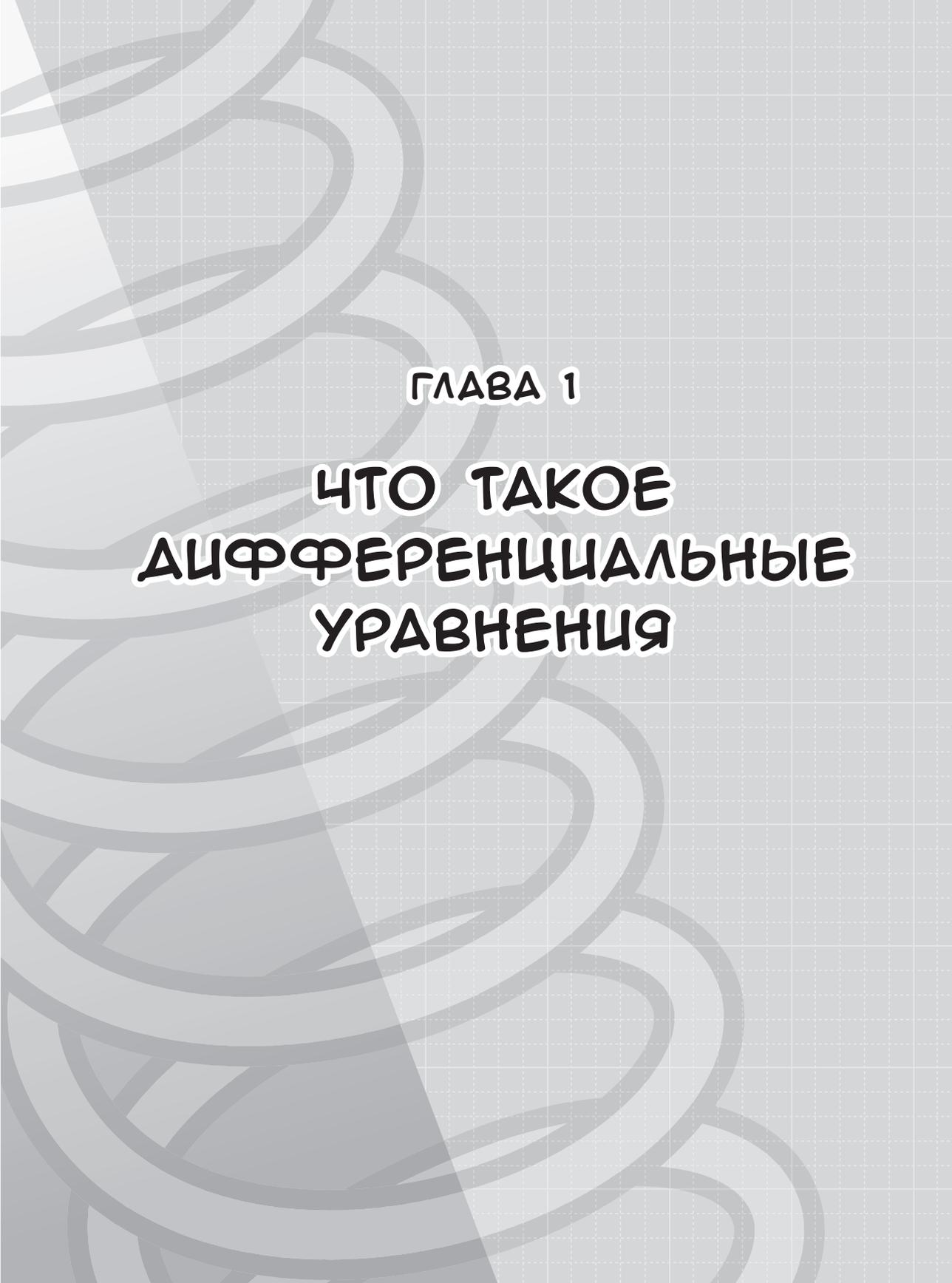


ХИ-ХИ



Я БУДУ ОЧЕНЬ СТРОГИМ
УЧИТЕЛЕМ!

ХОРОШО. БУДЬТЕ
ТАК ЛЮБЕЗНЫ!..

The background features a light gray grid pattern overlaid on a darker gray spiral that starts from the top left and winds towards the bottom right. The text is centered on the grid.

ГЛАВА 1

**ЧТО ТАКОЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ**

ВОТ КАК,
ВЫ ХОТИТЕ ВЫЙТИ
ИЗ ХРАМА, ЧТОБЫ
РАЗВЛЕЧЬСЯ?



А ЧТО
ВЫ БУДЕТЕ
ДЕЛАТЬ?

ОТАВХАТЬ БУДУ,
ЧТО ЖЕ ЕЩЕ.



ОТАВХАТЬ?

БОГИНЯ?

ЕСТЬ ВСЯКИЕ ВКУСНОСТИ,
ГУЛЯТЬ ВВОЛЮ, ДА?



АХ! Я ЗНАЮ МЕСТЕЧКО,
ГДЕ ОТЛИЧНЫЕ
ПИРОЖНЫЕ!

И ЕЩЕ ОДНО, ГДЕ ДЕЛАЮТ
ТАКОЕ ВКУСНОЕ ПАРФЕ
И ЯПОСКИЕ СЛАДОСТИ!



Я СМОТРУ,
В СЛАДОСТЯХ
ТЫ РАЗБИРАЕШЬСЯ
КУДА ЛУЧШЕ, ЧЕМ
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЯХ...

НЕ
ПРИЦИРАЙТЕСЬ.



А-А-А!!
ХОЧУ СКОРЕЕ
ВЫЙТИ!

ПИРОЖНЫЕ...
ПАРФЕ...



НО СПЕРВА
УЧЕБА,
НЕ ТАК ЛИ?

М-М-М...





ДАВАЙ-КА
СКОРЕЕ
НАЧНЕМ.

СЕЙЧАС
БЫСТРЕНЬКО СО ВСЕМ
РАЗБЕРЕМСЯ!



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ - ЭТО ИНСТРУМЕНТ
ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ ВАШЕГО
РЕАЛЬНОГО МИРА В МИРЕ
МАТЕМАТИКИ.

ПОЭТОМУ...



ЕСЛИ ЗНАТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ,

ТО МОЖНО
ВИДЕТЬ БУДУЩЕЕ.



БУДУЩЕЕ?..

ТЫ ЗНАЕШЬ,
ЧТО ТАКОЕ
"СИМУЛЯТОР ПОЛЕТОВ"?



ЭТО ТОТ, КОТОРЫЙ
В КОМПЬЮТЕРНЫХ
ИГРАХ?

АГА,

ТОТ, ГДЕ ТЫ МОЖЕШЬ
ПОПРОБОВАТЬ
УПРАВЛЯТЬ САМОЛЕТОМ.



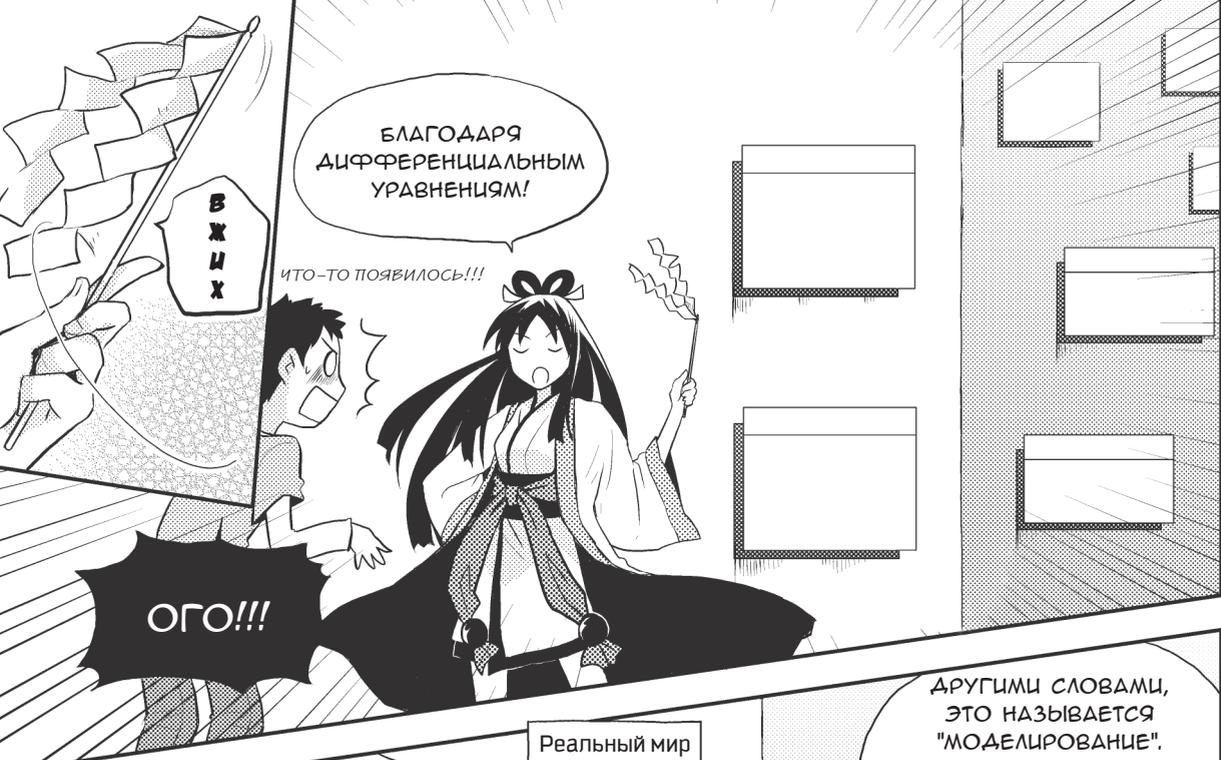
ТАК ВОТ,
А ТЫ ЗНАЕШЬ,
КАК ЭТОТ СИМУЛЯТОР
РАБОТАЕТ?

НУ,
Я В ЭТОМ
НЕ ОЧЕНЬ
РАЗБИРАЮСЬ...

КАК-ТО КОМПЬЮТЕР
ЭТО ВСЕ
РАССЧИТЫВАЕТ,
НАВЕРНОЕ....

УГУ,

А ЭТИ РАССЧЕТЫ
ОСУЩЕСТВЛЯЮТСЯ...



БЛАГОДАРЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ!

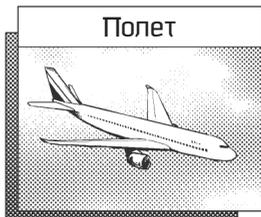
ЧТО-ТО ПОЯВИЛОСЬ!!!

В
Ж
И
Х

ОГО!!!

Реальный мир

Полет



Модели-
рование

ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
ЭТО НАЗЫВАЕТСЯ
"МОДЕЛИРОВАНИЕ".
ПОЛУЧЕННАЯ МОДЕЛЬ
СОДЕРЖИТ ФОРМУЛЫ,
СОДЕРЖАЩИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.

ЭТО И ЕСТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ!

Модель

Математика

Дифференциальные
уравнения

КОГДА СОЗДАЮТ
СИМУЛЯТОР ПОЛЕТОВ,
ПЕРВЫМ ДЕЛОМ НУЖНО
РЕАЛЬНОЕ ЯВЛЕНИЕ
(ПОЛЕТ) ИЗ РЕАЛЬНОГО
МИРА ОТОБРАЗИТЬ
АБСТРАКТНО
В МАТЕМАТИКЕ.

В
Ж
И
Х

РЕШАЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМ
ФУНКЦИИ.

Модель

Дифференциальные
уравнения

Вычис-
ления

Решение

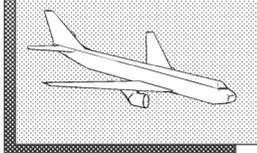
функция

С ПОМОЩЬЮ
ЭТИХ
ФУНКЦИЙ...

В
Ж
И
Х

...И СОЗДАЕМ
СИМУЛЯЦИЮ ПОЛЕТА.

Симуляция полета



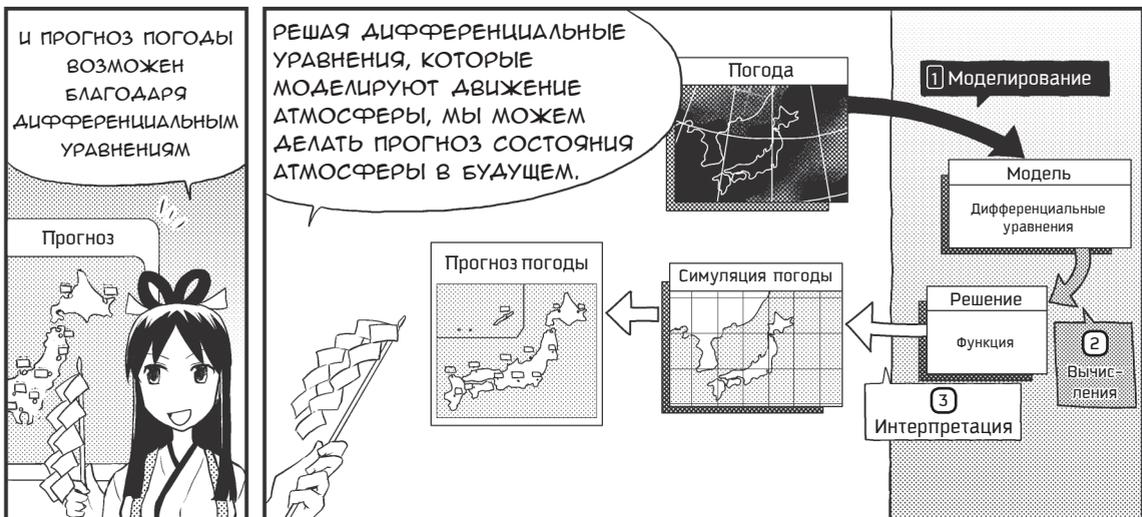
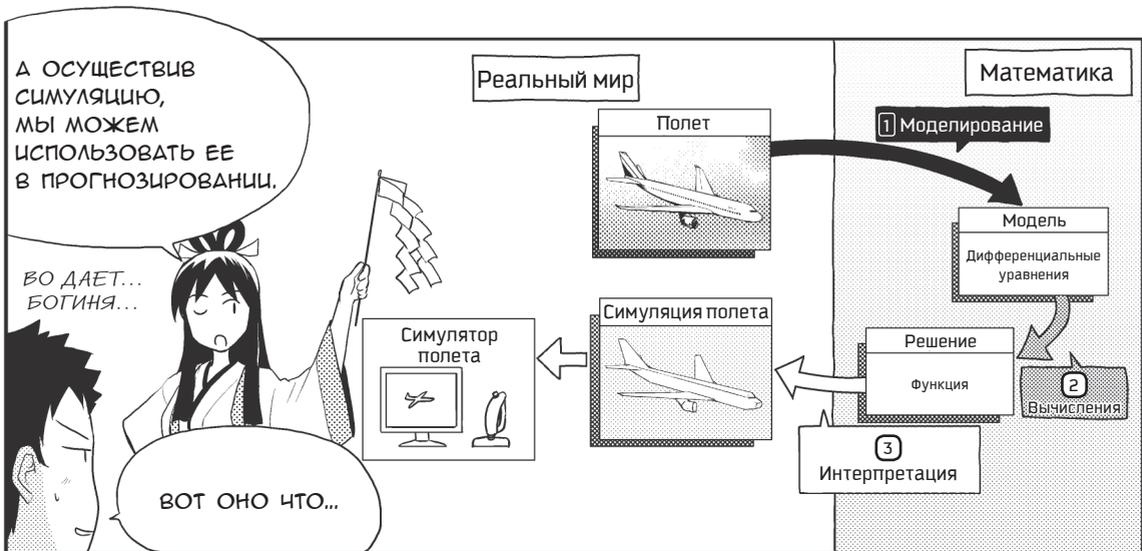
Решение

функция

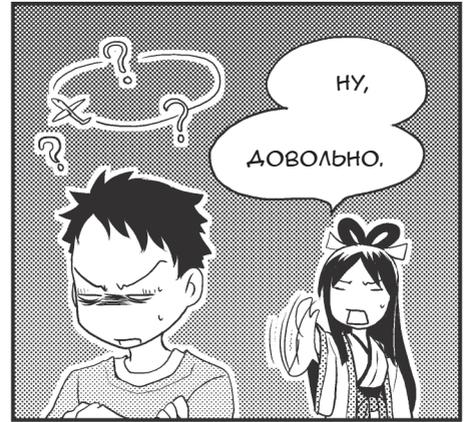
Интер-
прета-
ция

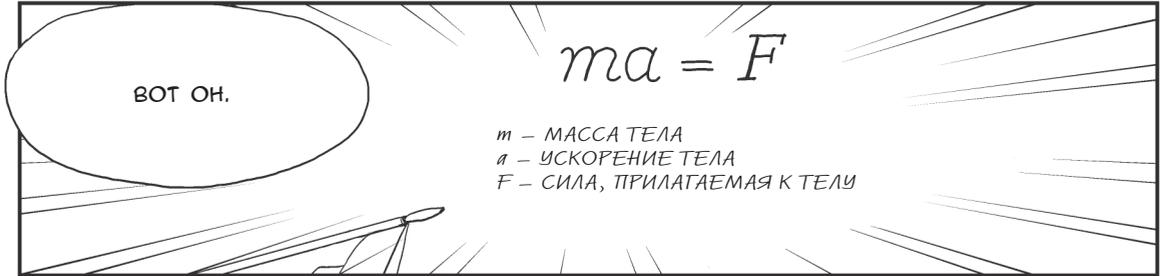
Симулятор
полета











Ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

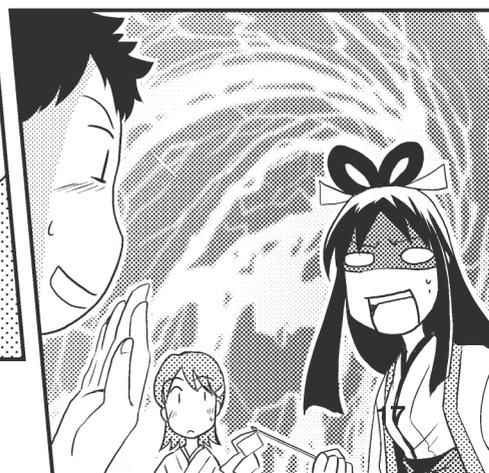
$ma = F$

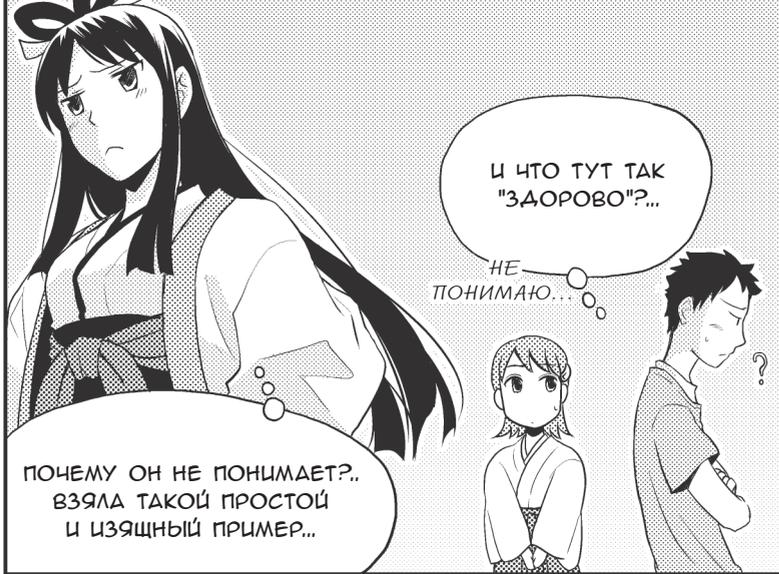
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

ЕСЛИ ВЫРАЗИТЬ УСКОРЕНИЕ ЧЕРЕЗ ИЗМЕНЕНИЕ МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ, ТО...

ВОТ И ПОЛУЧАЕМ ФОРМУЛУ, КОТОРАЯ СОДЕРЖИТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ!







ПОЧЕМУ ОН НЕ ПОНИМАЕТ?..
ВЗЯЛА ТАКОЙ ПРОСТОЙ
И ЦЯЩНЫЙ ПРИМЕР...

И ЧТО ТУТ ТАК
"ЗДОРОВО"?...

НЕ
ПОНИМАЮ...



БОГИНЯ ДУМАЕТ,
ЧТО ИЗ ЕЕ ОБЪЯСНЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

ВСЕ УЖЕ ДОЛЖНО
БЫТЬ ПОНЯТНО.



НО ГОСПОДИНУ ДАИЧИ
ЭТОГО ПОКА
НЕ ДОСТАТОЧНО...



ГОСПОЖА БОГИНЯ
НИКАК НЕ МОЖЕТ
ПРЕОДОЛЕТЬ СТЕНУ
РЕАЛЬНОГО МИРА,
А ГОСПОДИН ДАИЧИ -
СТЕНУ МИРА
МАТЕМАТИКИ...

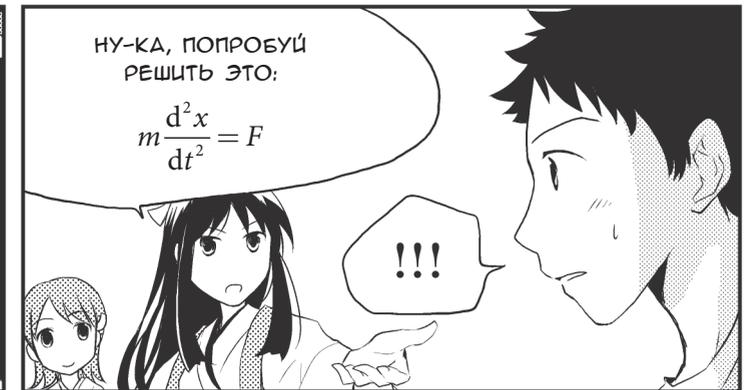


ГОСПОЖА
БОГИНЯ,
А МОЖЕТ БЫТЬ,
ПОПРОБОВАТЬ РЕШИТЬ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
УРАВНЕНИЕ?

!!!



ХМ...
ТЫ ДУМАЕШЬ?...



НУ-КА, ПОПРОБУЮ
РЕШИТЬ ЭТО:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

!!!



ТАК...
 m - ЭТО МАССА ТЕЛА...

ЧЕМУ ЖЕ
РАВНА МАССА?...

ВЖИХ

Эй!!

ЭТО ТЕБЕ
НЕ ОБЫЧНОЕ УРАВНЕНИЕ,
ЧТОБЫ РЕШАТЬ ЕГО,
ПОДАСТАВЛЯЯ ЧИСЛА!!



В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
УРАВНЕНИИ МЫ ДОЛЖНЫ
ПОЛУЧИТЬ В РЕЗУЛЬТАТЕ
НЕ ЧИСЛО, А ФОРМУЛУ!!!

АХ, ДА...



СЕЙЧАС, ЗНАЯ ФОРМУЛУ
ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F,$$

МЫ ИЩЕМ
ФУНКЦИЮ $x(t)$.



ФУНКЦИЯ $x(t)$
ЕСТЬ ВНУТРИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ,

И ОНА
ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНА,
А ЗНАЧИТ, КАК МОЖНО
НАЙТИ ЕЕ САМУ?



ДА!!!

НУЖНО
ПРОИНТЕГРИ-
РОВАТЬ, ДА?!

ВЕРНО.



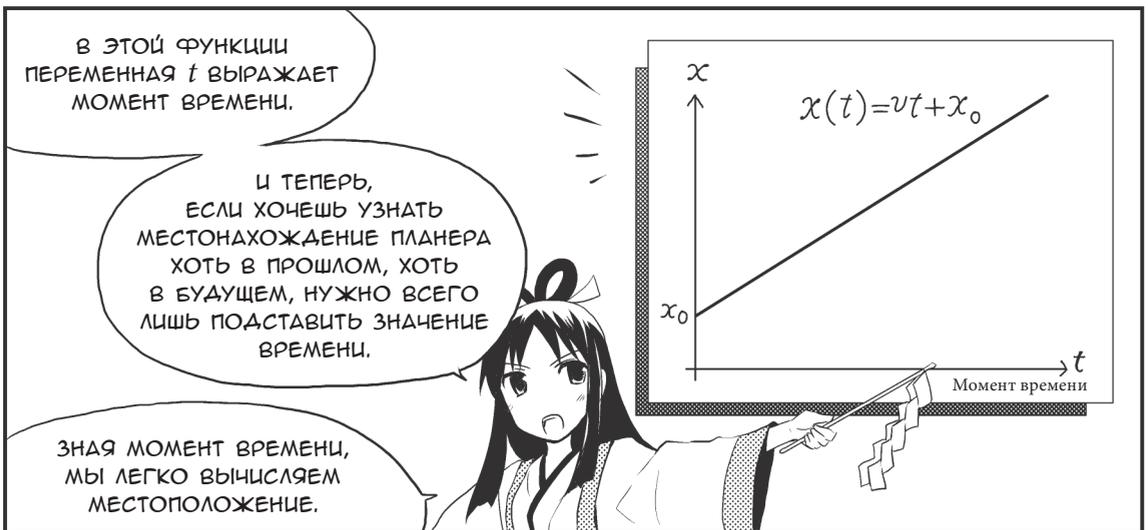
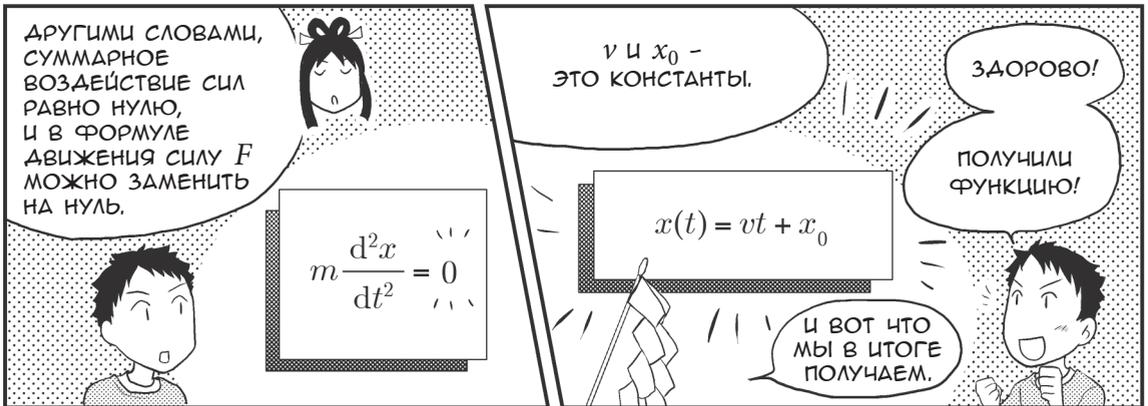
ИНТЕГРИРОВАНИЕ -
ЭТО ОБРАТНОЕ ДЕЙСТВИЕ.

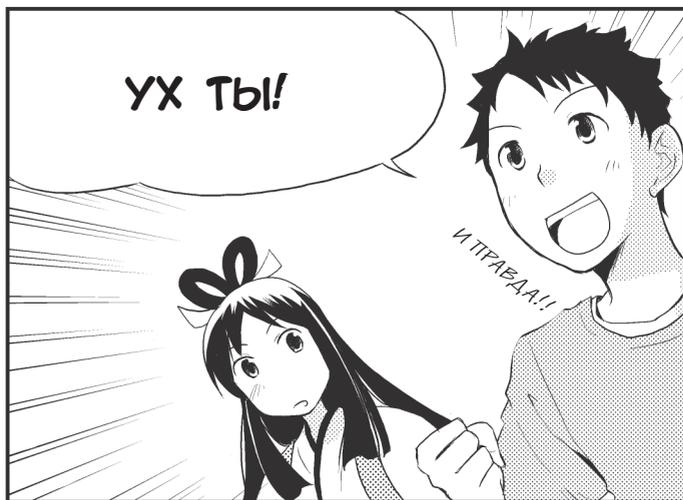
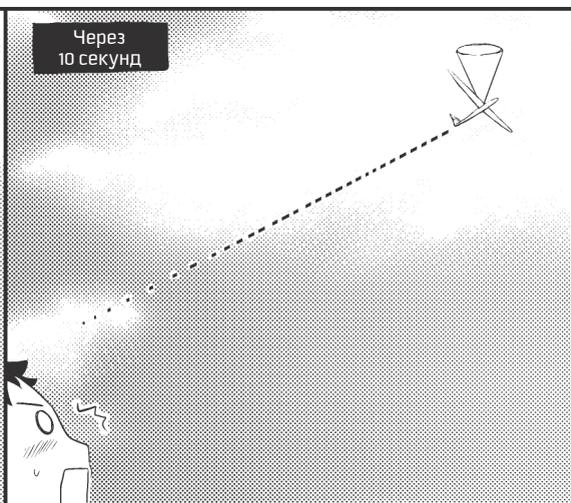
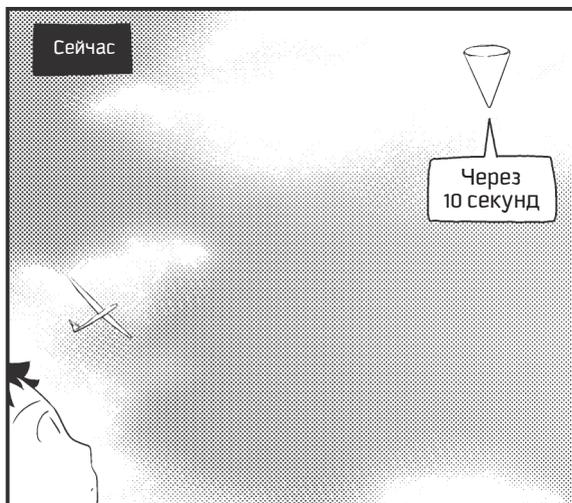
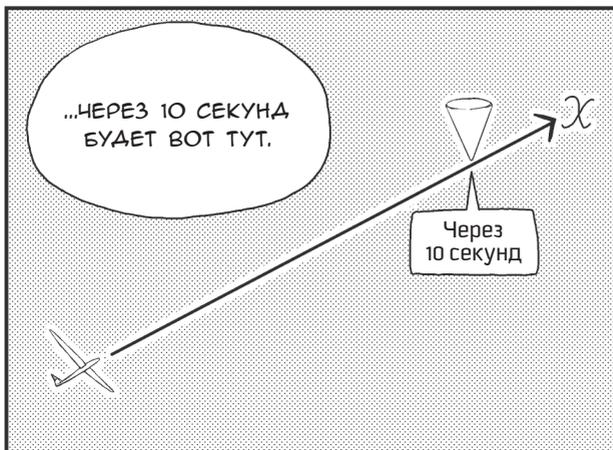
Обратные операции

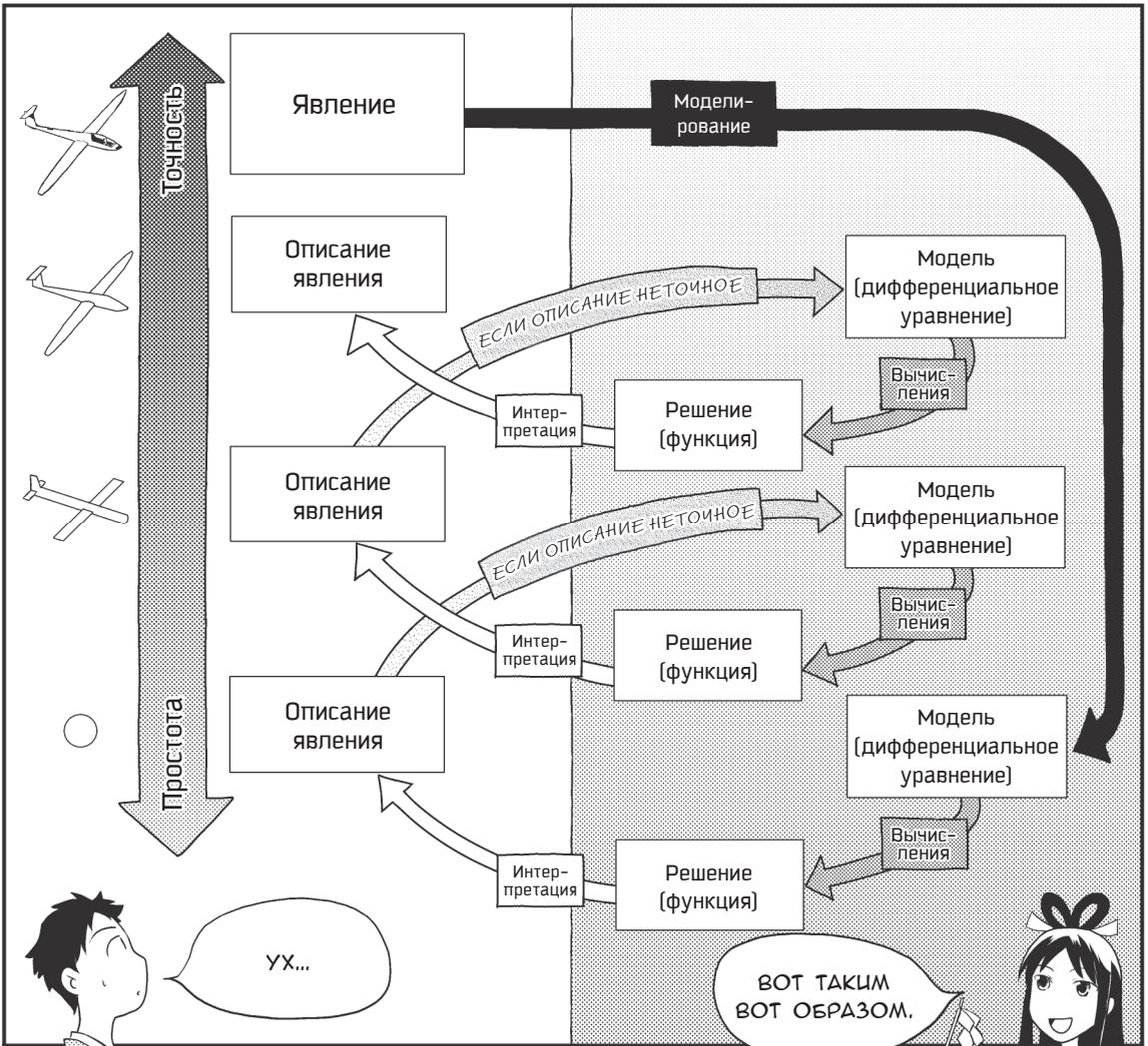
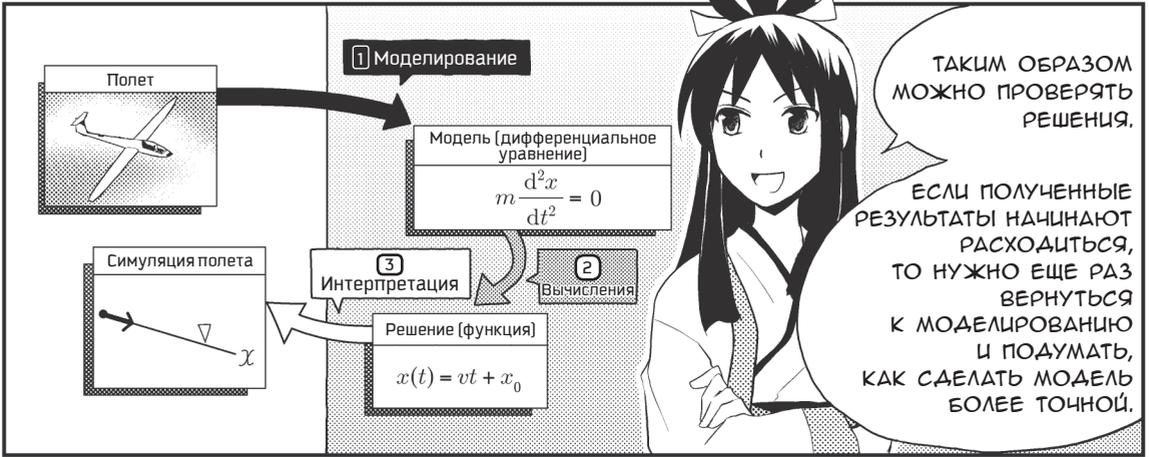
деление \longleftrightarrow умножение

дифферен- \longleftrightarrow интегриро-
цирование вание

ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАМ НУЖНО
ЗНАТЬ ИНТЕГРИРОВАНИЕ!

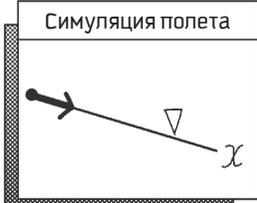






ОТ ТОГО, КАКОЙ ТОЧНОСТИ
МОДЕЛЬ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ,
ЗАВИСИТ ТО, С КАКОГО
РАССТОЯНИЯ МЫ СМОТРИМ
НА ПЛАНЕР.

В ЭТОМ ПРИМЕРЕ
МЫ СМОТРЕЛИ ИЗДАЛЕКА,
НЕ УЧИТЫВАЯ ФОРМЫ
САМОГО ПЛАНЕРА,
А РАССМАТРИВАЯ ЕГО
ТОЛЬКО КАК ДВИЖУЩУЮСЯ
В ПРОСТРАНСТВЕ ТОЧКУ.

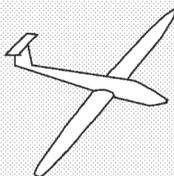


ПОЭТОМУ ЕСЛИ, НАПРИМЕР,
НАМ НУЖНО УЧЕСТЬ
ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА ВОКРУГ
ПЛАНЕРА, ТО МОДЕЛЬ СТАНЕТ
БОЛЕЕ СЛОЖНОЙ
И ДЕТАЛЬНОЙ.

ЭТО ЗАЧЕМ?

ЗАТЕМ, ЧТО МЫ
НЕ МОЖЕМ
ИГНОРИРОВАТЬ
ФОРМУ АППАРАТА.

Симуляция полета



А-А-А...

СЛОЖНОВАТО...

МОДЕЛИРОВАНИЕ -
ЭТО ПРАКТИКА.

ТУТ НЕОБХОДИМ ГЛАЗ,
СПОСОБНЫЙ КАК СЛЕДУЕТ
НАБЛЮДАТЬ ЗА ЯВЛЕНИЕМ
В РЕАЛЬНОМ МИРЕ...

...И ЗНАНИЯ,
ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПРЕДЕЛИТЬ,
КАКУЮ МОДЕЛЬ НУЖНО
ИСПОЛЬЗОВАТЬ, ЧТОБЫ
ПОЛУЧИТЬ НЕОБХОДИМЫЙ
РЕЗУЛЬТАТ!

